I N D I C E

Introducción... 3

Unidad Temática 1. Cálculo Integral para funciones de una variable.

Capítulo 1. Integral definida... **5**

1.1 Antiderivada... 6
1.2 Cambio de variable.. 14
1.2.1 Integrales de la forma $\int u^n du$
1.3 Integrales en donde intervienen funciones trascendentales................................ 14
1.3.1 Integrales de la forma $\int \frac{du}{u}$
1.3.2 Integrales de la forma $\int e^u du$
1.3.3 Integrales de la forma $\int a^u du$
1.3.4 Integrales de funciones trigonométricas
1.3.5 Integrales de funciones hiperbólicas
1.3.6 Integrales que dan como resultado funciones trigonométricas Inversas e hiperbólicas inversas
1.4 Notación sigma.. 39
1.5 Integral definida... 42
1.6 Teorema fundamental del cálculo... 46

Capítulo 2. Métodos de integración... **53**

2.1 Integración por partes.. 54
2.2 Integración de potencias de funciones trigonométricas...................................... 62
2.3 Sustitución trigonométrica... 72
2.4 Integración de funciones racionales... 80

Capítulo 3. Aplicaciones de la integral definida.. **94**

3.1 Área entre dos curvas.. 94
3.2 Volumen de un sólido de revolución.. 100
3.2.1 Método del Disco y de Arandelas
3.2.2 Método de la Corteza cilíndrica
3.3 Longitud de arco.. 107
3.4 Trabajo.. 110

Unidad temática 2: Cálculo integral para funciones de dos o más variables.

Capítulo 4. Integración múltiple……………………………………………………………………………… 116

4.1 Integrales iteradas……………………………………………………………………………………….. 116
4.1.1 Introducción
4.1.2 Concepto
4.2 Integrales dobles………………………………………………………………………………………… 120
4.3 Integrales triples………………………………………………………………………………………… 127

Anexo

Formulario……………………………………………………………………………………………………… 133
Rúbricas…… 138

I N T R O D U C C I Ó N

El nuevo modelo educativo de la Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL) está centrado en "La educación basada en competencias" y "La educación centrada en el aprendizaje".

Entendiendo por **Competencias** al conjunto de habilidades, destrezas, conocimientos, actitudes y valores que logren la formación integral de los estudiantes, en donde, ahora el estudiante es el principal actor en el proceso educativo y el docente toma el rol de facilitador o guiador dentro del mismo.

En cuanto a la educación centrada en el aprendizaje se ve desde un modelo Constructivista en donde el aprendizaje se construye, no se transfiere. Para este logro es necesario implementar actividades que logren despertar el interés de los estudiantes y desarrollar verdaderos aprendizajes significativos, mostrando el uso que se le va a dar al conocimiento.

En la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (FIME) de la UANL a través de la Subdirección Académica se diseñaron los programas analíticos para cada unidad de aprendizaje bajo este nuevo modelo, en donde se determinan las competencias generales, específicas y particulares a desarrollar en los estudiantes.

El Manual de Matemáticas II basado en competencias se articula principalmente con los ejes estructuradores del Modelo Educativo de la UANL, mismos que promueven el aprendizaje autónomo para la construcción de competencias y el impulso de nuevos esquemas de pensamiento que facilitan aprender a aprender.

El presente manual contiene una serie de actividades y ejercicios que permiten la adquisición de aprendizajes sobre Cálculo integral dentro de un marco que promueve el desarrollo de las competencias generales, específicas y particulares que establece el nuevo modelo educativo, dentro de cada uno de los programas analíticos de las unidades de aprendizaje.

Los ejercicios propuestos cuentan con su solución correspondiente para que de alguna manera los estudiantes puedan autoregularse y corregir los errores a tiempo.

Además, este manual contiene diferentes tipos de actividades que conllevan a cumplir con cada una de las fases del enfoque pedagógico-didáctico por competencias, que son:

Primera fase: Modelo de dominio

- Activación de conocimientos previos o introductorios al tema, lo cual permite a los estudiantes hacer una "Reflexión sobre la acción", es decir, lo que se debe de saber para comprender el nuevo contenido.

Segunda fase: Modelo de interacción

- Desarrollo de habilidades mediante una práctica guiada, lo cual le permite a los estudiantes hacer una “Reflexión en la acción”, es decir, aplicar actividades de autorregulación, para saber si avanza o se regresa.

Tercera fase: Modelo de usuario

- Integrar los conocimientos hacia el uso, ya sea cotidiano o profesional, que se le va a dar al conocimiento obtenido, de manera que el estudiante pueda “Reflexionar para la acción”, es decir, crear diferentes situaciones para uso autónomo más allá del aula.

Es de suma importancia, que al evaluar las actividades, en algunas, tratemos de involucrar a los estudiantes, ya que, de esta manera ellos se dan cuenta de los errores que cometen y es posible que a partir de esto también aprendan, además, de que reduce un poco el trabajo del docente.

Algunos tipos de evaluación son:

Heteroevaluación: es la evaluación hecha solamente por el docente.

Coevaluación: es la evaluación hecha entre estudiantes del grupo.

Autoevaluación: Es la evaluación hecha por el propio estudiante.

Estamos seguros que este manual redundará en la formación de un estudiante analítico, crítico, reflexivo y creativo, y le ayudará a desempeñarse exitosamente en su vida profesional, social y laboral.

Unidad Temática 1. Cálculo Integral para funciones de una variable.

Capítulo 1. Integral definida

Competencia particular 1:

Aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo mediante el uso de las reglas básicas de integración y el cambio de variable para evaluar integrales definidas.

Elemento de competencia 1:

Definir el concepto de antiderivada a través de su relación con la derivada para resolver integrales indefinidas.

Conocimiento previo: Derivadas de funciones algebraicas y relación entre derivada y diferencial.

Actividad No. 1	Remueve tus neuronas	Individual – extra aula
Propósito: Aplicar detalladamente las reglas de derivación y expresar el resultado en diferenciales, como activación de conocimiento previo.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga la solución correcta de los ejercicios		
Tiempo estimado para la actividad: 20 minutos		

Descripción de la actividad:

Aplicar las reglas de derivación dadas (paso por paso), en cada uno de los ejercicios propuestos y expresar el resultado en diferenciales como se muestra en el ejemplo.

Reglas de derivación

1) $\boldsymbol{D_x(c) = 0}$ en donde: c = constante
2) $\boldsymbol{D_x(x) = 1}$
3) $\boldsymbol{D_x[f(x) \pm g(x)] = D_x[f(x)] \pm D_x[g(x)]}$
4) $\boldsymbol{D_x[UV] = UD_x[V] + VD_x[U]}$ en donde: U Y V son funciones de x
5) $\boldsymbol{D_x\left[\frac{U}{V}\right] = \frac{VD_x[U] - U\,D_x[V]}{V^2}}$
6) $\boldsymbol{D_x[U^n] = n\,U^{n-1}\,D_x\,(U)}$

Ejemplo: Calcular el diferencial de la siguiente función: $\boldsymbol{y = (2x+3)(x-1)}$

Primero calculamos su derivada

$\frac{dy}{dx}$= (2x+3)D_x(x-1)+(x-1) D_x(2x+3)

$\frac{dy}{dx}$= (2x+3) (1)+(x-1)(2)

$\frac{dy}{dx}$= 2x+3+2x-2

$\frac{dy}{dx}$= 4x+1

$dy = (4x+1)dx$

Respuesta: $\boldsymbol{dy = (4x+1)dx}$

Ejercicio propuesto: Calcular el diferencial en cada una de las siguientes funciones:

1) $y = 3x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7$ 2) $y = \sqrt{x^2 + 4}$ 3) $y = (x^2 + 3)(2x - 1)$
4) $y = \frac{5x+1}{3x-2}$ 5) $y = \frac{3}{(2x+1)^2}$

1.1 Antiderivada

$F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$.
Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces $F(x)+C$ se le llama la antiderivada más general de $f(x)$, siendo C cualquier constante.
Si la antiderivada de f(x) es F(x) + C, esto se representa como:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

En donde:
$\int$ Se llama antiderivada, integral indefinida o primitiva.
f(x) Se llama integrando
C Se llama constante de integración
dx Se llama diferencial de x e indica cuál es la variable de integración

Reglas básicas de integración	
1. $\int dx = x + C$	**C es una constante**
2. $\int K dx = Kx + C$	**K es una constante**
3. $\int K\, f(x)\, dx = K \int f\,(x)\, dx$	
4. $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$	
5. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\,,\ n \neq -1$	

Nota: Los resultados se deben expresar sin exponentes negativos y sin fracciones en el denominador.

Ejemplo 1: Encuentra la antiderivada más general para la función: $f(x) = \sqrt[4]{x^5}$

f(x) = $\sqrt[4]{x^5} = x^{\frac{5}{4}}$

F(x) = $\frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1} + C = \frac{x^{\frac{9}{4}}}{\frac{9}{4}} + C = \frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}} + C$

Ejemplo 2: A continuación se resolverán integrales indefinidas usando o aplicando solamente las reglas básicas de integración.

a) $\int dw = w + C$ Aplicando la regla No. 1

b) $\int 5\, dy = 5y + C$ Aplicando la regla No. 2

c) $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{1}{4}\, x^4 + C$ Aplicando la regla No. 5

d) $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = \frac{-1}{2x^2} + C$ Aplicando la regla No. 5

e) $\int \sqrt[3]{x^2}\, dx = \int x^{2/3} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5} x^{5/3} + C$ Aplicando la regla No.5

f) $\int 5x^4 dx = 5\int x^4 dx$ Aplicando la regla No. 3

$= 5\left(\frac{x^{4+1}}{4+1} + C_1\right) = 5\left(\frac{x^5}{5}\right) + 5C_1$ Aplicando la regla No. 5

$= x^5 + C$ Haciendo $5C_1 = C$

g) $\int \frac{dx}{4\sqrt{x}}\, dx = \frac{1}{4}\int x^{-1/2} dx$ Aplicando la regla No. 3

$= \frac{1}{4}\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1}\right) + C = \frac{1}{4}\left(\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right) + C$ Aplicando la regla No. 5

$= \frac{1}{4}\left(2x^{1/2}\right) + C = \frac{1}{2}x^{1/2} + C = \frac{1}{2}\sqrt{x} + C$ Simplificando

h) $\int (3x^2 + 5x - 2)dx = \int 3x^2 dx + \int 5x dx - \int 2dx$ Aplicando la regla No.4

$= 3\int x^2 dx + 5\int x dx - 2\int dx$ Aplicando la regla No. 3

$= 3\left[\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right) + C_1\right] + 5\left[\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right) + C_2\right] - 2x + C_3$ Aplicando las

reglas No. 5 y No.2 y como $3C_1 + 5C_2 + C_3 = C$, resulta:

$= 3\left(\frac{x^3}{3}\right) + 5\left(\frac{x^2}{2}\right) - 2x + C$ Simplificando

$= x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + C$

Observa que en los siguientes ejemplos primero se realiza la operación algebraica para simplificar el integrando y después se aplican las reglas básicas de integración.

i) $\int (2y - 1)(3y + 2)dy = \int (6y^2 + y - 2)dy$ Multiplicando los binomios

$= \int 6y^2 dy + \int y dy - \int 2dy$

$= 6\int y^2 dy + \int y dy - 2\int dy$

$= 6\left(\frac{y^{2+1}}{2+1}\right) + \frac{y^{1+1}}{1+1} - 2y + C$

$= 6\left(\frac{y^3}{3}\right) + \frac{y^2}{2} - 2y + C$

$= 2y^3 + \frac{1}{2}y^2 - 2y + C$

j) $\int (x^2-3)^2 dx = \int (x^4-6x^2+9)\,dx$ Desarrollando el binomio al cuadrado

$$= \int x^4 dx - \int 6x^2 dx + \int 9dx$$
$$= \int x^4 dx - 6\int x^2 dx + 9\int dx$$
$$= \frac{x^{4+1}}{4+1} - 6\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right) + 9x + C$$
$$= \frac{x^5}{5} - 6\left(\frac{x^3}{3}\right) + 9x + C$$
$$= \frac{1}{5}x^5 - 2x^3 + 9x + C$$

k) $\int \left(\frac{x^2-25}{x-5}\right) dx = \int \left[\frac{(x+5)(x-5)}{(x-5)}\right] dx = \int (x+5)dx$ Simplificando la fracción

$$= \int x\,dx + \int 5dx = \int xdx + 5\int dx$$
$$= \frac{x^{1+1}}{1+1} + 5x + C = \frac{1}{2}x^2 + 5x + C$$

l) $\int \left(\frac{2z+4}{\sqrt{z}}\right) dz = \int z^{-\frac{1}{2}}(2z+4)dz = \int (2z^{1/2} + 4z^{-1/2})dz$ Simplificando la fracción

$$= \int 2z^{1/2}dz + \int 4z^{-1/2}dz$$
$$= 2\int z^{1/2}dz + 4\int z^{-1/2}dz$$
$$= 2\left(\frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right) + 4\left(\frac{z^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1}\right) + C$$
$$= 2\left(\frac{z^{3/2}}{3/2}\right) + 4\left(\frac{z^{1/2}}{1/2}\right) + C$$
$$= 2\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) + 4\left(2z^{1/2}\right) + C$$
$$= \frac{4}{3}z^{3/2} + 8z^{1/2} + C$$

Ejemplo 3: Crecimiento de población.

La tasa de crecimiento dP/dt de una población de bacterias es proporcional a la raíz cuadrada de *t*, donde *P* es el tamaño de la población y *t* es el tiempo en días $(0 \leq t \leq 10)$. El tamaño inicial de la población es de 250 bacterias. Después de 4 días la población ha crecido hasta 400 bacterias. Estimar el tamaño de la población después de 9 días.

Solución:

Primero se establece la ecuación que representa la tasa de crecimiento de la población de bacterias, esto es:

$$\frac{dP}{dt} = K\sqrt{t}$$

Analizando las condiciones iniciales, resulta que:

$Para\ t = 0; P = 250$
$Para\ t = 4; P = 400$
$Para\ t = 9; P = ?$

Despejando dP de la tasa de crecimiento e integrando ambos lados de la ecuación

$\int dP = \int K\sqrt{t}dt$; resulta:

$$P(t) = \frac{2}{3}K\, t^{\frac{3}{2}} + C$$

Se consideran las condiciones iniciales para encontrar los valores de las constantes (K y C), es decir:

a) Si para $t = 0; P = 250$ y sustituyendo en la ecuación, resulta que C = 250, entonces la ecuación toma la forma de:

$$P(t) = \frac{2}{3}K\, t^{3/2} + 250$$

b) Si para $t = 4; P = 400$ y sustituyendo en la ecuación anterior, resulta que:

$$K = \frac{225}{8}$$

Sustituyendo los valores de las constantes encontrados, la ecuación que representa el crecimiento de la población de bacterias es:

$$P(t) = \frac{75}{4}\, t^{3/2} + 250$$

c) Para t = 9

$$P(9) = \frac{75}{4}\,(9)^{3/2} + 250 = \frac{3025}{4} \approx \mathbf{756\ \boldsymbol{bacterias}}$$

Ejemplo 4: Movimiento vertical.

Una pelota de beisbol es lanzada hacia arriba desde una altura de un metro con una velocidad inicial de 10 metros por segundo. Determinar la altura máxima alcanzada.

Solución:

Por definición: $a = \frac{dV}{dt}\ y\ V = \frac{dS}{dt}$

Condiciones iniciales:

Para t = 0; S = 1; V(0) = 10 m/s
S_{max} = ?

Utilizando – $\mathbf{9.8\ \boldsymbol{m/s^2}}$ como la aceleración de la gravedad, se tiene que:

$\frac{dV}{dt} = -9.8$ y despejando dV resulta

$dV = -9.8\, dt$, integrando ambos lados de la ecuación

$V = -9.8\, t + C$

Considerando las condiciones iniciales para t = 0; V = 10, entonces C = 10 y la ecuación de velocidad toma la forma de:

$V = -9.8\, t + 10$

Cuando la pelota alcanza su altura máxima, la velocidad es cero, por lo tanto el tiempo requerido para alcanzar dicha altura es t = 1.02 s

Como $V = \frac{dS}{dt} = -9.8t + 10$, despejando dS e integrando ambos lados de la ecuación, resulta:

$$\int dS = \int (-9.8t + 10)\, dt$$

$S = -4.9\, t^2 + 10t + C$

Considerando las condiciones iniciales para t = 0; S = 1, entonces C = 1 y la función de posición es:

$S = -4.9\, t^2 + 10t + 1$

Como para alcanzar su altura máxima requiere un tiempo de 1.02 segundos, entonces:

$S_{máx} = -4.9(1.02)^2 + 10(1.02) + 1 = -5.1 + 10.2 + 1 = \boldsymbol{6.1\ metros}$

Ejercicio 1.1

I. Encuentra la antiderivada más general de cada función, aplicando paso por paso las reglas arriba mencionadas y expresar el resultado sin exponentes negativos y sin fracciones en el denominador.

1) $f(x) = 10x^5 + 2$

2) $S(t) = t^2 - \frac{t}{2} + \sqrt{t}$

3) $f(r) = 5r^2 + \frac{1}{r^3} - 4$

4) $f(x) = x^2 + \frac{3}{\sqrt{x}}$

5) $G(S) = \frac{1}{S^2} - 2\sqrt{S} + 1$

6) $f(\theta) = \theta^{1/3} + 14\theta^{5/2} + \frac{1}{\theta^2}$

II. Resuelva cada una de las siguientes antiderivadas y expresar el resultado sin exponentes negativos y sin fracciones en el denominador:

7) $\int dz$

8) $\int \frac{dx}{3}$

9) $\int 4x\sqrt{x}dx$

10) $\int (2x+1)dx$

11) $\int (2\sqrt[3]{x} - 6\sqrt{x})dx$

12) $\int \frac{5}{x^3}\ dx$

13) $\int \left(\frac{w^2+4w-3}{w^4}\right) dw$

14) $\int \left(\frac{x^2-x-12}{x+3}\right) dx$

15) $\int (4y-1)(3y+4)dy$

16) $\int \sqrt[4]{z^3}\,(3z-4)dz$

17) $\int (2x+3)^2 dx$

18) $\int (x-1)^3 dx$

III. Resuelva los siguientes problemas:

19) **Crecimiento de árboles.**

Un vivero suele vender cierto arbusto después de 5 años de crecimiento y cuidado. La velocidad de crecimiento durante esos 5 años, está dada por: *dh/dt* = 1.5*t* + 6, donde *t* es el tiempo en años y *h* es la altura en centímetros. Las plantas de semillero miden 13 cm de altura cuando se plantan (*t*=0)
a) Determinar la altura después de *t* años.
b) ¿Qué altura tienen los arbustos cuando se venden?

20) **Caída libre.**
Sobre la luna, la aceleración de la gravedad es de $1.6\ m/s^2$. En la luna se deja caer un objeto desde un peñasco y golpea la superficie de la misma 10 segundos después. ¿Desde qué altura se dejó caer el objeto?, ¿Cuál era su velocidad en el momento del impacto?

Solución al ejercicio 1.1

1) $\frac{5}{3}x^6 + 2x\ + C$

2) $\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{2}{3}t^{3/2} + C$

3) $\frac{5}{3}r^3 - \frac{1}{2r^2} - 4r + C$

4) $\frac{1}{3}x^3 + 6x^{1/2} + C$

5) $\frac{-1}{S} - \frac{4}{3}S^{3/2} + S + C$

6) $\frac{3}{4}\theta^{4/3} + 4\theta^{7/2} - \frac{1}{\theta} + C$

7) $z + C$

8) $\frac{1}{3}x + C$

9) $\frac{8}{5}x^{5/2}+C$

10) x^2+x+C

11) $\frac{3}{2}x^{4/3}-4x^{3/2}+C$

12) $\frac{-5}{2x^2}+C$

13) $\frac{-1}{w}-\frac{2}{w^2}+\frac{1}{w^3}+C$

14) $\frac{1}{2}x^2-4x+C$

15) $4y^3+\frac{13}{2}y^2-4y+C$

16) $\frac{12}{11}z^{11/4}-\frac{16}{7}z^{7/4}+C$

17) $\frac{4}{3}x^3+6x^2+9x+C$

18) $\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x+C$

19) $h(t)=0.75t^2+6t+13$
$h(5)=61.75\ cm$

20) $h=80\ m; V=\ -16\ m/s$

Actividad No. 2	Encuentra el error	Individual – extra aula
Propósito: Aplicar correctamente las reglas básicas para resolver integrales indefinidas.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el listado que contenga los errores presentados en la solución de cada integral indefinida, así como su justificación para corregirlos.		
Tiempo estimado para la actividad: 15 minutos		

Descripción de la actividad:

I. En esta actividad se te presentan 3 integrales indefinidas resueltas que presentan errores en su solución, debes encontrar dichos errores y describir cómo se pueden corregir.

1) $\int(2+3x)dx=2\int 3xdx=6\int xdx=6\left(\frac{x^2}{2}\right)+C=3x^2+C$

2) $\int\frac{x^2}{3}dx=\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}\right)+C=\ \frac{1}{6}x^3+C$

3) $$\int\left(3x^2-\frac{x}{4}-\ 1\right)dx=\int 3x^2dx-\int\frac{x}{4}dx+\int dx=3\int x^2dx-4\int xdx+\int dx$$
$$=3\left(\frac{x^3}{3}\right)-4\left(\frac{x^2}{2}\right)+x+C=x^3+2x^2+x+C$$

II. Retroalimentación

Actividad No. 3	Paso a paso	Individual – extra aula
Propósito: Aplicar correctamente las reglas básicas para resolver integrales indefinidas.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga la identificación correcta de la o las reglas básicas de integración aplicada en cada paso		
Tiempo estimado para la actividad: 10 minutos		

Descripción de la actividad:

I. En esta actividad se te presentan integrales indefinidas resueltas en donde debes identificar la o las reglas básicas aplicadas en cada paso y escribirla al lado derecho.

$$\int (6x^2 - 4x + 1)dx$$

$\int 6x^2dx - \int 4xdx + \int dx$ ______________________________

$6\int x^2dx - 4\int xdx + \int dx$ ______________________________

$6\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right) - 4\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right) + x + C$ ______________________________

$$6\left(\frac{x^3}{3}\right) - 4\left(\frac{x^2}{2}\right) + x + C$$

$$2x^3 - 2x^2 + x + C$$

II. Retroalimentación

Elemento de competencia 2:
Aplicar el proceso de cambio de variable mediante la elección correcta de la sustitución en la solución de integrales indefinidas.

Conocimiento previo:
Derivadas de funciones logarítmicas, exponenciales, trigonométricas, trigonométricas inversas, hiperbólicas, hiperbólicas inversas, y la aplicación de las propiedades de los logaritmos y de las identidades trigonométricas.

Actividad No. 4	**A la deriva**	**Individual – extra aula**
Propósito: Aplicar las derivadas de funciones trascendentales		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga los procedimientos y solución correcta a cada ejercicio propuesto.		
Tiempo estimado para la actividad: 1 hora		

Descripción de la actividad:
Deriva y simplifica cada una de las siguientes funciones, si es necesario aplica las propiedades de los logaritmos y las identidades trigonométricas.

1) $y = Lnx^2$	2) $y = e^{x^2}$	3) $y = Ln(Cos4x)$
4) $y = Csc(5x)$	5) $y = Cos\left(\frac{x}{3}\right)$	6) $y = Sec(e^x)$
7) $y = 2Sen\theta Cos\theta$	8) $y = \frac{Cos(2x)}{Sen(2x)}$	9) $y = Tanx - x$

10) $y = Arc\ Sen(x)$ 11) $y = Arc\ Tan(2x)$ 12) $y = Senh(2x+1)$
13) $y = Cosh^{-1}(Senx)$ 14) $y = 8^{x^2}$ 15) $y = ArcCos(3x)$

1.2 Cambio de variable

El cambio de variable es un proceso por medio del cual la integral de una función compuesta es transformada en una integral más sencilla, donde se pueda aplicar directamente alguna regla básica de integración.

$$\int f[g(x)]g'(x)\mathrm{dx} = \int f(u)du \qquad Integral\ de\ una\ función\ compuesta$$

$$donde\ u = g(x) y\ du = g'(x)dx$$

Procedimiento para efectuar el cambio de variable

Identificar “u”.
Derivar “u” generando los diferenciales.
Despejar el diferencial resultante (dx).
Sustituir “u” y “dx” en la integral y simplificar.
Resolver la integral resultante.
Sustituir “u” en el resultado.

1.2.1 Integrales de la forma $\int u^n du$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad para\ n \neq -1$$

En los siguientes ejemplos se ilustra el razonamiento empleado para hacer el cambio de variable y el uso de la regla $\int u^n du$.

Ejemplo. Resuelva las siguientes integrales:

1) $\int \sqrt{5+x}\, dx$

$Haciendo\ u = 5 + x; du = (1)dx; despejando\ dx = du$
Sustituyendo “u” y “dx” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \sqrt{5+x}\, dx = \int \sqrt{u}\, du = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{3}(5+x)^{3/2} + C$$

2) $\int (7x^3 + 4)^{\frac{1}{4}} x^2 dx$

$Haciendo\ u = 7x^3 + 4; du = 21x^2 dx; despejando\ dx = \dfrac{du}{21x^2}$

Sustituyendo “u” y “dx” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int (7x^3+4)^{\frac{1}{4}} x^2 dx = \int u^{\frac{1}{4}} x^2 \left(\frac{du}{21x^2}\right) = \frac{1}{21}\int u^{\frac{1}{4}} du = \frac{1}{21}\left(\frac{u^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}\right) + C$$

$$\int (7x^3+4)^{\frac{1}{4}} x^2 dx = \frac{1}{21}\left(\frac{4}{5}\right) u^{5/4} + C = \frac{4}{105}(7x^3+4)^{5/4}$$

3) $\int \sqrt{9x-2}\,(5x)dx$

$Haciendo\ u = 9x - 2; du = 9dx; despejando\ dx = \dfrac{du}{9}$

Sustituyendo “u” y “dx” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \sqrt{9x-2}\,(5x)dx = \int u^{\frac{1}{2}}(5x)\left(\frac{du}{9}\right) = \frac{5}{9}\int u^{1/2} x\, du$$

$Despejando$ "x" $de\ u = 9x - 2, sustituyendo$" x" $en\ la\ integral\ y\ simplificando$:

$$\int \sqrt{9x-2}\,(5x)dx = \frac{5}{9}\int u^{1/2}\left(\frac{u+2}{9}\right) du = \frac{5}{81}\int u^{\frac{1}{2}}(u+2)du$$

$$\int \sqrt{9x-2}\,(5x)dx = \frac{5}{81}\int \left(u^{3/2} + 2u^{1/2}\right) du = \frac{5}{81}\int u^{3/2} du + \frac{10}{81}\int u^{1/2} du$$

$$\int \sqrt{9x-2}\,(5x)dx = \frac{5}{81}\left(\frac{u^{5/2}}{5/2}\right) + \frac{10}{81}\left(\frac{u^{3/2}}{3/2}\right) + C = \frac{5}{81}\left(\frac{2}{5}\right) u^{5/2} + \frac{10}{81}\left(\frac{2}{3}\right) u^{3/2} + C$$

$$\int \sqrt{9x-2}\,(5x)dx = \frac{2}{81}(9x-2)^{5/2} + \frac{20}{243}(9x-2)^{3/2} + C$$

4) $\int \frac{\ln(2x)}{2x} dx$

$Haciendo\ u = \ln(2x)\,; du = \dfrac{dx}{x}; despejando\ dx = xdu$

Sustituyendo “u” y “dx” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{\ln(2x)}{2x} dx = \int \frac{u}{2x}(xdu) = \frac{1}{2}\int u\, du = \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2}\right) + C = \frac{1}{4}(ln2x)^2 + C$$

5) $\int \left(e^{5x}+7\right)^3 e^{5x} dx$

$Haciendo\ u = e^{5x} + 7; du = e^{5x}(5)dx; despejando\ dx = \dfrac{du}{5e^{5x}}$

Sustituyendo “u” y “dx” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int (e^{5x} + 7)^3 e^{5x} dx = \int u^3 e^{5x} \left(\frac{du}{5e^{5x}}\right) = \frac{1}{5}\int u^3 du = \frac{1}{5}\left(\frac{u^4}{4}\right) + C = \frac{1}{20}(u)^4 + C$$

$$\int (e^{5x} + 7)^3 e^{5x} dx = \frac{1}{20}(e^{5x} + 7)^4 + C$$

6) Depreciación.

La tasa de depreciación *dV/dt* de una máquina es inversamente proporcional al cuadrado de *(t+1)*, donde *V* es el valor de la máquina *t* años después de que se compró. El valor inicial de la máquina fue de 500 000 dólares, y su valor decreció 100 000 dólares en el primer año. Estimar su valor después de 4 años.

Solución:

La ecuación diferencial que expresa la tasa de depreciación está dada por:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{K}{(t+1)^2}$$

Las condiciones iniciales son:
Para *t* = 0; *V* = 500 000 dólares
Para *t* = 1; *V* = 400 000 dólares

Despejando *dV* e integrando ambos lados de la ecuación, resulta:

$$dV = \frac{K}{(t+1)^2}\, dt$$

$$\int dV = \int \frac{K}{(t+1)^2}\, dt$$

$$V = \frac{K}{t+1} + C$$

Sustituyendo las condiciones iniciales para encontrar los valores de las constantes K y C, resulta que: *K* = 200 000 y *C* = 300 000

Por lo tanto, la función que representa el valor de la máquina a los *t* años de uso es:

$$V(t) = \frac{200\,000}{t+1} + 300\,000$$

Como se requiere estimar su valor a los 4 años de uso, entonces se evalúa *V*(4)

$$V(4) = \frac{200\ 000}{4+1} + \ 300\ 000$$

$$\boldsymbol{V(4) = 340\ 000\ dólares}$$

Ejercicio 1.2.1
Resuelva las siguientes integrales y simplifica sus resultados:

1) $\int (8-2x)^2\ dx$

2) $\int \sqrt[3]{x^4+3}\, x^3\ dx$

3) $\int \left(w + \frac{2}{w}\right)^2$ dw

4) $\int \sqrt{2t^3+4}\ \ 3t^5$ dt

5) $\int \sqrt{3x+5}\,(x-2)\ dx$

6) $\int (e^{7x}+1)^3\ e^{7x}\ dx$

7) $(8+e^{-t})^2\ e^{-t}\ dt$

8) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\ dx$

9) $\int \frac{\ln(2\theta)}{2\theta}\ d\theta$

10) $\int sen^4 4x \cos 4x\ dx$

11) $\int ctg^2 3t\ csc^2\ 3t\ dt$

12) $\int \tan w\ \ sec^2\ w\ dw$

13) **Flujo de efectivo**: La tasa de desembolso *dQ/dt* de una donación federal de 2 millones de dólares es proporcional al cuadrado de *(100-t)*. El tiempo *t* se mide en días $(0 \leq t \leq 100)$ y *Q* es la cantidad que queda para ser desembolsada. Determinar la cantidad que queda para desembolsarse después de 50 días. Suponer que todo el dinero se gastará en 100 días.

Solución al ejercicio 1.2.1

1) $-\frac{1}{6}\ (8-2x)^3 + C$

2) $\frac{3}{16}\ (x^4+3)^{\frac{4}{3}} + C$

3) $\frac{1}{3}\ \ w^3 + 4w - \frac{4}{w} + C$

4) $\frac{1}{10}(2t^3+4)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}\ (2t^3+4)^{\frac{3}{2}} + C$

5) $\frac{2}{45}(3x+5)^{\frac{5}{2}} - \frac{22}{27}(3x+5)^{\frac{3}{2}} + C$

6) $\frac{1}{28}(e^{7x}+1)^4 + C$

7) $-\frac{1}{3}(8+\mathrm{e}^{-\mathrm{t}})^3 + C$

8) $\frac{1}{3}\ ln^3 x + C$

9) $\frac{1}{4}(\ln 2\theta)^2 + C$

10) $\frac{1}{20}\ sen^5\ 4x + C$

11) $-\frac{1}{9} ctg^3\ 3t + C$

12) $\frac{1}{2}\ tan^2 w$+C

13) Q(50) = $250 000

1.3 Integrales en donde intervienen funciones trascendentales

1.3.1 Integrales de la forma $\int \frac{du}{u}$

$$\int \frac{du}{u} = Ln|u| + C$$

En donde "u" es una función derivable de *x*
Si u = x ; entonces $\int \frac{dx}{x} = Ln|x| + C$

Nota: Para aplicar esta fórmula es importante identificar "u" que puede ser todo ó solo una parte del denominador.

Ejemplo: Resuelva cada una de las siguientes integrales

1) $\int \frac{5dx}{x} = 5\int \frac{dx}{x} = 5ln|x| + C$

2) $\int \frac{dx}{3x-1}$

$Haciendo\ u = 3x - 1; du = 3dx; despejando\ dx = \frac{du}{3}$
Sustituyendo "u" y "dx" en la integral, resulta:

$$\int \frac{dx}{3x-1} = \int \frac{1}{3x-1}dx = \int \frac{1}{u}\left(\frac{du}{3}\right) = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}ln|u| + C = \frac{1}{3}ln|3x-1| + C$$

Aplicando la propiedad de $rln(p) = ln(p^r)$ el resultado se puede expresar como:

$$\int \frac{dx}{3x-1} = ln(3x-1)^{1/3} + C = ln\sqrt[3]{3x-1} + C$$

3) $\int \frac{4x}{2-x^2}dx$

$Haciendo\ u = 2 - x^2; du = -2xdx; despejando\ dx = \frac{-du}{2x}$

Sustituyendo "u" y "dx" en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{4x}{2-x^2}dx = \int \frac{4x}{u}\left(\frac{-du}{2x}\right) = -2\int \frac{du}{u} = -2ln|u| + C = -2ln|2-x^2| + C$$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(4+\sqrt{x}\,)}$

$Haciendo\ u = 4 + \sqrt{x}\ ; du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}\ ; despejando\ dx = 2\sqrt{x}$du
Sustituyendo "u" y "dx" en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(4+\sqrt{x})} = \int \frac{2\sqrt{x}du}{\sqrt{x}u} = 2\int \frac{du}{u} = 2ln|u| + C = 2ln\left|4+\sqrt{x}\right| + C$$

Aplicando la propiedad de $rln(p) = ln(p^r)$ el resultado se puede expresar como:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(4+\sqrt{x})} = Ln(4+\sqrt{x})^2 + C$$

5) $\int \frac{\boldsymbol{x^2+5x-3}}{\boldsymbol{x+2}} \boldsymbol{dx}$ haciendo la división de polinomios porque es una fracción impropia, queda:

$$\int \frac{x^2+5x-3}{x+2} dx = \int \left(x+3-\frac{9}{x+2}\right) dx = \int x dx + \int 3dx - 9\int \frac{dx}{x+2}$$

$En\ la\ \text{última}\ integral\ se\ hace\ u = x+2; du = (1)dx; despejando\ du = dx$

Sustituyendo "u" y "dx" en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{x^2+5x-3}{x+2} dx = \int x dx + 3\int dx - 9\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 9ln|u| + C$$

$$\int \frac{x^2+5x-3}{x+2} dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 9ln|x+2| + C$$

6) $\int \frac{\boldsymbol{Sec^2(2x)}}{\boldsymbol{Tan(2x)+3}} \boldsymbol{dx}$

$Haciendo\ u = Tan(2x)+3; du = Sec^2(2x)(2dx);\ despejando\ dx = \frac{du}{2Sec^2(2x)}$

Sustituyendo "u" y "dx" en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{Sec^2(2x)}{Tan(2x)+3} dx = \int \frac{Sec^2(2x)}{u}\left(\frac{du}{2Sec^2(2x)}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}ln|u| + C$$

$$\int \frac{Sec^2(2x)}{Tan(2x)+3} dx = \frac{1}{2}ln|Tan(2x)+3| + C$$

Observa que en el siguiente ejemplo primero se debe hacer una operación algebraica para simplificar el integrando.

7) $\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{e^{-x}+3}}$

$$\int \frac{dx}{e^{-x}+3} = \int \left(\frac{1}{\frac{1}{e^x}+3}\right) dx = \int \left(\frac{1}{\frac{1+3e^x}{e^x}}\right) dx = \int \left(\frac{e^x}{1+3e^x}\right) dx$$

$Haciendo\ u = 1+3e^x; du = 3e^x dx; despejando\ dx = \frac{du}{3e^x}\ y\ sustituyendo:$

$$\int \frac{dx}{e^{-x}+3} = \int \frac{e^x}{u}\left(\frac{du}{3e^x}\right) = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}ln|u| + C = \frac{1}{3}ln|1+3e^x| + C$$

8) Transferencia de calor: Considerando que el tiempo requerido para enfriar un objeto, está dado por:

$$\boldsymbol{t = \frac{10}{ln\,2}\int \frac{1}{T-100}\,dT}$$

En donde *t* es el tiempo en minutos y *T* es la temperatura en °Fahrenheit.
Determinar *el* tiempo (*t*) que se requiere para enfriar un objeto en función de la temperatura (*T*). Considerar que cuando *t = 0; T = 300°F*

Solución:

Resolviendo la integral, tomando como *u = T* – 100 y *du* = dT y sustituyendo, resulta:

$$t = \frac{10}{\ln 2}\int \frac{du}{u} = \frac{10}{\ln 2} ln|T-100| + C$$

Sustituyendo las condiciones iniciales para encontrar el valor de la constante *C,* resulta que: *C* = -76.44
Por lo tanto, el tiempo requerido para enfriar un objeto está dado por:

$$\boldsymbol{t(T) = \frac{10}{\ln 2}\, ln|T-100| - 76.44}$$

Ejercicio 1.3.1

Resuelva cada una de las siguientes integrales

1) $\int \frac{dx}{2x+4}$

2) $\int \frac{2x}{x^2-6}dx$

3) $\int \frac{8x+6}{2x^2+3x-2}dx$

4) $\int \frac{2x+3}{4x^2-9}dx$

5) $\int \frac{2x^2+x-9}{x-2}dx$

6) $\int \frac{dx}{x^{1/3}(x^{2/3}+4)}$

7) $\int \frac{dx}{xLnx}$

8) $\int \frac{e^{4x}}{4-e^{4x}}dx$

9) $\int \frac{Sen(2x)}{Cos(2x)-1}dx$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$

11) $\int \frac{e^{-2x}}{e^{-x}+1}dx$

12) **Crecimiento de población**: Una población de bacterias cambia a un ritmo

$$\frac{dP}{dt} = \frac{3\,000}{1+0.25t}$$

Donde t es el tiempo en días. La población inicial (cuando t = 0) era 1 000. Escribir una ecuación que describa la población en cualquier instante t y calcular la población cuando han transcurrido 3 días.

Solución al ejercicio 1.3.1

1) $\frac{1}{2}ln|4+2x|+C$ 2) $Ln|x^2-6|+C$ 3) $2ln|2x^2+3x-2|+C$

4) $\frac{1}{2}ln|2x-3|+C$ 5) $x^2+5x+ln|x-2|+C$ 6) $ln\left(x^{2/3}+4\right)^{3/2}+C$

7) $ln|lnx|+C$ 8) $-\frac{1}{4}ln|4-\mathrm{e}^{4\mathrm{x}}|+C$ 9) $-\frac{1}{2}ln|Cos(2x)-1|+C$

10) $2\sqrt{x}-2ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C$ 11) $e^{-x}-ln|e^{-x}+1|+C$

12) $P(t)=\ 12\ 000\ ln|1+0.25t|+1000; P(3)=\ 7\ 715.39\ bacterias$

1.3.2 Integrales de la forma $\int e^u du$

$$\int \boldsymbol{e^u du = \ e^u + C}$$

En donde "u" es una función derivable de x y e es la constante de Euler (e = 2.718)

Si $u=x, entonces{:} \int e^x dx = e^x + C$

Ejemplo: Resuelve cada una de las siguientes integrales

1) $\boldsymbol{\int 5e^x dx = 5\int e^x dx = 5e^x + C}$

2) $\boldsymbol{\int e^{3x-1}dx}$

$Haciendo\ u = 3x-1; du = 3dx{:}\ despejando\ dx = \ \frac{du}{3}$

$Sustituyendo$ "u" y "dx" $en\ la\ integral, resulta$:

$\int e^{3x-1}dx = \int e^u\left(\frac{du}{3}\right) = \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{3x-1} + C$

3) $\boldsymbol{\int 12xe^{3x^2}dx}$

$Haciendo\ u = 3x^2; du = 6x\ dx; despejando\ dx = \frac{du}{6x}$
$Sustituyendo$ "u" y "dx" $en\ la\ integral\ y\ simplificando, resulta$:

$\int 12xe^{3x^2}dx = \int 12xe^u\left(\frac{du}{6x}\right) = 2\int e^u du = 2e^u + C = 2e^{3x^2} + C$

4) $\int \frac{4dx}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}$

$$\int \frac{4dx}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}} = \int \frac{4e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx;$$

$Haciendo\ u = -\sqrt{x}; du = \dfrac{-dx}{2\sqrt{x}}; despejando\ dx = -2\sqrt{x}du$

$Sustituyendo$ "u" y "dx" en la integral y simplificando, resulta:

$\int \frac{4dx}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}} = \int \frac{4e^u}{\sqrt{x}}\left(-2\sqrt{x}du\right) = -8\int e^u du = -8e^u + C = -8e^{-\sqrt{x}} + C = \frac{-8}{e^{\sqrt{x}}} + C$

Observa que en los siguientes ejemplos primero se efectúa la operación algebraica para simplificar el integrando y después se aplica la fórmula correspondiente.

5) $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$

$\int (e^x + e^{-x})^2 dx = \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x})dx = \int e^{2x}dx + 2\int dx + \int e^{-2x}dx$

$Resolviendo\ cada\ una\ de\ las\ integrales\ resultantes, queda$:

$\int (e^x + e^{-x})^2 dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2e^{2x}} + C$

6) $\int \frac{e^{5x} - e^{3x} + 4e^x}{e^{2x}}\ dx$

$$\int \frac{e^{5x} - e^{3x} + 4e^x}{e^{2x}}\ dx = \int e^{3x}dx - \int e^x dx + 4\int e^{-x}dx$$

$\int \frac{e^{5x} - e^{3x} + 4e^x}{e^{2x}} = \frac{1}{3}e^{3x} - e^x - 4e^{-x} + C = \frac{1}{3}e^{3x} - e^x - \frac{4}{e^x} + C$

Ejercicio 1.3.2

Resuelva cada una de las siguientes integrales

1) $\int \frac{e^x}{3} dx$

2) $\int \frac{3}{e^x} dx$

3) $\int (4x-6)e^{(x^2-3x)} dx$

4) $\int \frac{3e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

5) $\int Cos(2x)e^{Sen(2x)} dx$

6) $\int (e^{5x})(2e^x)\,(4e^{2x}) dx$

7) $\int e^{-x}(e^{3x}-e^x-1) dx$

8) $\int \frac{3e^{3x}-2e^{2x}-e^x+1}{e^x} \, dx$

Solución al ejercicio 1.3.2

1) $\frac{1}{3}e^x + C$

2) $\frac{-3}{e^x} + C$

3) $2e^{(x^2-3x)} + C$

4) $6e^{\sqrt{x}} + C$

5) $\frac{1}{2}\, e^{Sen(2x)} + C$

6) $e^{8x} + C$

7) $\frac{1}{2}\, e^{2x} - x + \frac{1}{e^x} + C$

8) $\frac{3}{2} e^{2x} - 2e^x - x - \frac{1}{e^x} + C$

1.3.3 Integrales de la forma $\int \boldsymbol{a^u du}$

$$\int \boldsymbol{a^u du} = \frac{\boldsymbol{a^u}}{\boldsymbol{lna}} + \boldsymbol{C}$$

En donde “u” es una función derivable de x y a es un número real positivo $(a \neq 1)$

Si $u = x, entonces$: $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$

Ejemplo: Resuelva cada una de las siguientes integrales:

1) $\int \boldsymbol{3^x dx} = \frac{\boldsymbol{3^x}}{\boldsymbol{ln3}} + \boldsymbol{C}$

2) $\int \boldsymbol{4^x e^x dx}$

Como el exponente en ambas funciones es el mismo, se puede aplicar la propiedad de los exponentes de $(ab)^m = a^m b^m$ para reexpresar la integral como:

$\int 4^x e^x dx = \int (4e)^x dx = \frac{(4e)^x}{ln(4e)} + C$ en donde $a = 4e$

3) $\int x2^{x^2}\, dx$

$Haciendo\ u =\ x^2; du = 2xdx; despejando\ dx = \frac{du}{2x}\ y\ a = 2$

Sustituyendo "u", "dx" y a en la integral y simplificando, resulta:

$$\int x2^{x^2}\, dx = \int xa^u \left(\frac{du}{2x}\right) = \frac{1}{2}\int a^u du = \frac{1}{2}\left(\frac{a^u}{ln2}\right) + C = \frac{1}{2ln2}2^{x^2} + C = \frac{2^{x^2}}{ln4} + C$$

4) $\int e^{2x}\left(6^{e^{2x}}\right)dx$

$Haciendo\ u =\ e^{2x}; du = e^{2x}(2dx); despejando\ dx = \frac{du}{2e^{2x}}\ y\ a = 6$

Sustituyendo "u", "dx" y a en la integral y simplificando, resulta:

$$\int e^{2x}\left(6^{e^{2x}}\right)dx = \int e^{2x}a^u \left(\frac{du}{2e^{2x}}\right) = \frac{1}{2}\int a^u du = \frac{1}{2}\left(\frac{6^{e^{2x}}}{ln6}\right) + C = \frac{6^{e^{2x}}}{ln36} + C$$

Observa que en el siguiente ejemplo primero se efectúa la operación algebraica para simplificar el integrando y después se aplican las fórmulas correspondientes.

5) $\int (4^x + e^x)^2 dx$

$$\int (4^x + e^x)^2 dx = \int [4^{2x} + 2(4^x)(e^x) + e^{2x}]dx = \int 4^{2x}dx + 2\int (4e)^x dx + \int e^{2x}dx$$

$Haciendo\ u = 2x; du = 2dx; despejando\ dx = \frac{du}{2}\ y\ a = 4\ en\ la\ primera\ integral,$

$Considerando\ que\ la\ segunda\ integral\ se\ resolvi$ó $en\ el\ ejemplo\ 2$,

$Haciendo\ z = 2x; dz = 2dx; despejando\ dx = \frac{dz}{2}\ en\ la\ tercera\ integral$ y

$Sustituyendo\ lo\ anterior\ mencionado\ en\ cada\ una\ de\ las\ integrales, resulta$:

$$\int (4^x + e^x)^2 dx = \int a^u \left(\frac{du}{2}\right) + 2\left[\frac{(4e)^x}{ln(4e)}\right] + \int e^z \frac{dz}{2}$$

$$\int (4^x + e^x)^2 dx = \frac{1}{2}\int a^u du + \frac{2(4e)^x}{\ln{(4e)}} + \frac{1}{2}\int e^z dz = \frac{1}{2}\left(\frac{a^u}{lna}\right) + \frac{2(4e)^x}{\ln{(4e)}} + \frac{1}{2}e^z + C$$

$$\int (4^x + e^x)^2 dx = \frac{4^{2x}}{2ln4} + \frac{2(4e)^x}{\ln(4e)} + \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

Ejercicio 1.3.3
Resuelva cada una de las siguientes integrales:

1) $\int 6^x dx$ 2) $\int \left(\frac{4^x}{e^x}\right) dx$ 3) $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

4) $\int \frac{5^{Sen^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 5) $\int (3^x - 2)^2 dx$

Solución al ejercicio 1.3.3

1) $\frac{6^x}{ln6} + C$ 2) $\frac{\left(\frac{4}{e}\right)^x}{ln\left(\frac{4}{e}\right)} + C$ 3) $\frac{2^{\sqrt{x}+1}}{ln2} + C$

4) $\frac{5^{Sen^{-1}x}}{ln5} + C$ 5) $\frac{3^{2x}}{2ln3} - \frac{4(3^x)}{ln3} + 4x + C$

1.3.4 Integrales de funciones trigonométricas

Todas las funciones trigonométricas y sus derivadas se pueden integrar por medio de una fórmula que implica un cambio de variable, en donde **"u"** es el argumento y es una función derivable de x.

Integrales de Funciones trigonométricas	
Funciones trigonométricas	**Derivadas de las funciones trigonométricas**
1. $\int \boldsymbol{Sen\,u\,du = -Cos\,u + C}$	**7.** $\int \boldsymbol{Sec^2 u\,du = Tan\,u + C}$
2. $\int \boldsymbol{Cos\,u\,du = Sen\,u + C}$	**8.** $\int \boldsymbol{Csc^2 u\,du = -Cot\,u + C}$
3. $\int \boldsymbol{Tan\,u\,du = Ln\lvert Sec\,u\rvert + C}$ $\boldsymbol{= -Ln\lvert Cos\,u\rvert + C}$	**9.** $\int \boldsymbol{Sec\,u\,Tan\,u\,du = Sec\,u + C}$
4. $\int \boldsymbol{Cot\,u\,du = -Ln\lvert Csc\,u\rvert + C}$ $\boldsymbol{= Ln\lvert Sen\,u\rvert + C}$	**10.** $\int \boldsymbol{Csc\,u\,Cot\,u\,du = -Csc\,u + C}$
5. $\int \boldsymbol{Sec\,u\,du = Ln\lvert Sec\,u + Tan\,u\rvert + C}$	
6. $\int \boldsymbol{Csc\,u\,du = Ln\lvert Csc\,u - Cot\,u\rvert + C}$	

Ejemplo: Resuelva cada una de las siguientes integrales:

1) $\int \boldsymbol{Sen(5x)dx}$

$$Haciendo\ u = 5x; du = 5dx; despejando\ dx = \frac{du}{5}$$

Sustituyendo "u" y "dx" en la integral y simplificando, resulta:

$$\int Sen(5x)dx = \int Sen\, u\left(\frac{du}{5}\right) = \frac{1}{5}\int Sen\, u\, du = \frac{1}{5}(-Cos\, u) + C = \frac{-1}{5}Cos(5x) + C$$

2) $\int \boldsymbol{3x\, Tan(1 - 2x^2)\, dx}$

$$Haciendo\ u = 1 - 2x^2; du = -4x\, dx; despejando\ dx = \frac{-du}{4x}$$

Sustituyendo "u" y "dx" en la integral y simplificando, resulta:

$$\int 3x\, Tan(1 - 2x^2)\, dx = \int 3x\, Tan\, u\left(\frac{-du}{4x}\right) = \frac{-3}{4}\int Tan\, u\, du$$

$\int 3x\, Tan(1 - 2x^2)\, dx = \frac{-3}{4}(-ln|Cos\, u|) + C = \frac{3}{4}ln|Cos(1 - 2x^2)| + C$, o bien

$$\int 3x\, Tan(1 - 2x^2)\, dx = \frac{-3}{4}(ln|Sec\, u|) + C = \frac{-3}{4}ln|Sec(1 - 2x^2)| + C$$

3) $\int \boldsymbol{Cos(2x)Cos(Sen\, 2x)dx}$

$$Haciendo\ u = Sen\, 2x; du = Cos\, 2x(2dx); despejando\ dx = \frac{du}{2Cos\, 2x}$$

Sustituyendo "u" y "dx" en la integral y simplificando, resulta:

$$\int Cos(2x)Cos(Sen\, 2x)dx = \int Cos(2x)Cos\, u\left(\frac{du}{2Cos\, 2x}\right) = \frac{1}{2}\int Cos\, u\, du$$

$$\int Cos(2x)Cos(Sen\, 2x)dx = \frac{1}{2}Sen\, u + C = \frac{1}{2}Sen(Sen\, 2x) + C$$

4)$\int \boldsymbol{(Sec\, 3x - Csc^2 4x)dx}$

$$\int (Sec\, 3x - Csc^2 4x)dx = \int Sec\, 3x\, dx - \int Csc^2\, 4x\, dx$$

$$Haciendo\ u = 3x; du = 3dx; despejando\ dx = \frac{du}{3}\ en\ la\ primera\ integral\ y$$

$$Haciendo\ z = 4x; dz = 4dx; despejando\ dx = \frac{dz}{4}\ en\ la\ segunda\ integral$$

Sustituyendo "u" y "dx" correspondiente en cada integral y simplificando, resulta:

$$\int (Sec\, 3x - Csc^2 4x)dx = \int Sec\, u\left(\frac{du}{3}\right) - \int Csc^2 z\left(\frac{dz}{4}\right)$$

$$\int (Sec\ 3x - Csc^2 4x)dx = \frac{1}{3}\int Sec\ u\ du - \frac{1}{4}\int Csc^2 z\ du$$
$$\int (Sec\ 3x - Csc^2 4x)dx = \frac{1}{3} ln|Sec\ u + Tan\ u| - \frac{1}{4}(-Cot\ z) + C$$
$$\int (Sec\ 3x - Csc^2 4x)dx = \frac{1}{3} ln|Sec\ 3x + Tan\ 3x| + \frac{1}{4} Cot(4x) + C$$

Observa que en los siguientes ejemplos primero es necesario aplicar alguna o algunas identidades trigonométricas, o bien, efectuar una operación algebraica para simplificar el integrando y después se aplican las fórmulas correspondientes.

5) $\int \frac{dx}{Sen\ 5x}$

$\int \frac{dx}{Sen\ 5x} = \int \left(\frac{1}{Sen\ 5x}\right) dx = \int Csc\ 5x\ dx$ Aplicando una identidad

$Haciendo\ u = 5x; du = 5dx; despejando\ dx = \frac{du}{5}$

Sustituyendo “u” y “dx” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{dx}{Sen\ 5x} = \int Csc\ u \left(\frac{du}{5}\right) = \frac{1}{5}\int Csc\ u\ du = \frac{1}{5} ln|Csc\ u - Cot\ u| + C$$

$$\int \frac{dx}{Sen\ 5x} = \frac{1}{5}\ ln|Csc\ 5x - Cot\ 5x| + C$$

6) $\int \frac{3^x dx}{Cos^2(3^x)}$

$\int \frac{3^x dx}{Cos^2(3^x)} = \int 3^x \left(\frac{1}{Cos\ 3^x}\right)^2 dx = \int 3^x Sec^2 3^x dx$ Aplicando una identidad

$Haciendo\ u = 3^x; du = 3^x ln3\ dx; despejando\ dx = \frac{du}{3^x \ln 3}$

Sustituyendo “u” y “dx” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{3^x dx}{Cos^2(3^x)} = \int 3^x Sec^2 u \left(\frac{du}{3^x \ln 3}\right) = \frac{1}{\ln 3}\int Sec^2 u\ du = \frac{1}{\ln 3}\ Tan\ u + C$$

$$\int \frac{3^x dx}{Cos^2(3^x)} = \frac{1}{\ln 3}\ Tan\ 3^x + C$$

7) $\int (\mathbf{1} + \boldsymbol{Cot^2\ 6x})\boldsymbol{dx}$

$\int (1 + Cot^2\ 6x)dx = \int Csc^2 6x\ dx$ Aplicando una identidad

$Haciendo\ u = 6x; du = 6\ dx; despejando\ dx = \frac{du}{6}$

Sustituyendo “u” y “dx” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int (1 + Cot^2\ 6x)dx = \int Csc^2 u \left(\frac{du}{6}\right) = \frac{1}{6}\int Csc^2 u\ du = \frac{1}{6}(-Cot\ u) + C$$

$$\int (1 + Cot^2\ 6x)dx = \frac{-1}{6}\ Cot\ 6x + C$$

8) $\int \frac{(1-Sen^2 x)}{Cos^3 x}\ dx$

$\int \frac{(1-Sen^2 x)}{Cos^3 x}\ dx = \int \frac{Cos^2 x}{Cos^3 x}\ dx$ Aplicando una identidad

$\int \frac{(1-Sen^2 x)}{Cos^3 x}\ dx = \int \frac{1}{Cos\ x}\ dx = \int Sec\ x\ dx$ Simplificando y aplicando una identidad

$$\int \frac{(1 - Sen^2 x)}{Cos^3 x}\ dx = ln|Sec\ x + Tan\ x| + C$$

9) $\int \frac{(Sen\ x - Cos\ x)}{Sen\ x}\ dx$

$\int \frac{(Sen\ x-Cos\ x)}{Sen\ x}\ dx = \int \frac{Sen\ x}{Sen\ x} dx - \int \frac{Cos\ x}{Sen\ x}\ dx$ Haciendo operación algebraica

$\int \frac{(Sen\ x-Cos\ x)}{Sen\ x}\ dx = \int dx - \int Cot\ x\ dx$ Simplificando en la primera integral y aplicando una identidad en la segunda integral.

$\int \frac{(Sen\ x-Cos\ x)}{Sen\ x}\ dx = x + ln|Sen\ x| + C,$ o bien:

$$\int \frac{(Sen\ x - Cos\ x)}{Sen\ x}\ dx = x - ln|Csc\ x| + C$$

10) $\int \frac{(Sen^2 x - 4)dx}{(Sen\ x + 2)}$

$Factorizando\ el\ numerador\ y\ simplificando\ la\ fracción, resulta:$

$$\int \frac{(Sen^2x - 4)}{(Sen\,x + 2)}dx = \int \frac{(Sen\,x + 2)(Sen\,x - 2)}{(Sen\,x + 2)}\,dx = \int (Sen\,x - 2)dx$$

$$\int \frac{(Sen^2x - 4)}{(Sen\,x + 2)}dx = \int Sen\,x\,dx - 2\int dx$$

$$\int \frac{(Sen^2x - 4)}{(Sen\,x + 2)}dx = -Cos\,x - 2x + C$$

Ejercicio 1.3.4

Resuelva cada una de las siguientes integrales:

1) $\int Sec\,2x\,Tan\,2x\,dx$

2) $\int 6x\,Cos\,3x^2\,dx$

3) $\int e^{3x}\,Csc^2\,e^{3x}\,dx$

4) $\int (Tan\,2x - Sen\,5x)dx$

5) $\int \frac{5dx}{Cos\,3x}$

6) $\int \left(\frac{Sen^2x + Cos^2x}{Csc\,x}\right)dx$

7) $\int (Sen\,x + Cos\,x)^2 dx$

8) $\int \frac{Sec\,x}{Tan\,x}\,dx$

9) $\int \frac{Tan^3x}{Sec^2x - 1}\,dx$

10) $\int \frac{3^x}{Tan\,3^x}\,dx$

Solución al ejercicio 1.3.4

1) $\frac{1}{2}\,Sec\,2x + C$

2) $Sen\,3x^2 + C$

3) $\frac{-1}{3}\,Cot\,e^{3x} + C$

4) $\frac{1}{2}\,ln|Sec\,2x| + \frac{1}{5}\,Cos\,5x + C$

5) $\frac{5}{3}ln|Sec\,3x + Tan\,3x| + C$

6) $-\,Cos\,x + C$

7) $x - \frac{1}{2}\,Cos\,2x + C$

8) $ln|Csc\,x - Cot\,x| + C$

9) $ln|Sec\,x| + C$

10) $\frac{1}{\ln 3}\,ln|Sen\,3^x| + C$

1.3.5 Integrales de funciones hiperbólicas

Integrales de Funciones hiperbólicas	
Funciones hiperbólicas	Derivadas de funciones hiperbólicas
1. $\int \boldsymbol{Senh\, u\, du = Cosh\, u + C}$	5. $\int \boldsymbol{Sech^2 u\, du = Tanh\, u + C}$
2. $\int \boldsymbol{Cosh\, u\, du = Senh\, u + C}$	6. $\int \boldsymbol{Csch^2 u\, du = -Coth\, u + C}$
3. $\int \boldsymbol{Tanh\, u\, du = ln\lvert Cosh\, u\rvert + C}$	7. $\int \boldsymbol{Sech\, uTanh\, u\, du = -Sech\, u + C}$
4. $\int \boldsymbol{Coth\, u\, du = ln\lvert Senh\, u\rvert + C}$	8. $\int \boldsymbol{Csch\, uCoth\, u\, du = -Csch\, u + C}$
En donde "*u*" es una función derivable de "*x*".	

Ejemplo: Resuelva cada una de las siguientes integrales:

1) $\int \boldsymbol{Sech\ 2x\ Tanh\ 2x\ dx}$

$$Haciendo\ u = 2x; du = 2dx; despejando\ dx = \frac{du}{2}$$

Sustituyendo "u" y "dx" en la integral y simplificando, resulta:

$$\int Sech\ 2x\ Tanh\ 2x\ dx = \int Sech\ u\ Tanh\ u\left(\frac{du}{2}\right) = \frac{1}{2}\int Sech\ u\ Tanh\ u\ du$$

$$\int Sech\ 2x\ Tanh\ 2x\ dx = \frac{1}{2}(-Sech\ u) + C = \frac{-1}{2}\ Sech\ 2x + C$$

2) $\int \boldsymbol{\frac{Senh(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}}\ dx}$

$$Haciendo\ u = \sqrt[3]{x}; du = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}; despejando\ dx = 3\sqrt[3]{x^2}du$$

Sustituyendo "u" y "dx" en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{Senh(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}}\ dx = \int \frac{Senh\ u}{\sqrt[3]{x^2}}\left(3\sqrt[3]{x^2}\ du\right) = 3\int Senh\ u\ du = 3Cosh\ u + C$$

$$\int \frac{Senh(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}}\ dx = 3\ Cosh\left(\sqrt[3]{x}\right) + C$$

3) $\int \boldsymbol{\frac{Cosh(lnx)}{x}\ dx}$

$Haciendo\ u = \ln x; du = \frac{dx}{x}; despejando\ dx = x\ du$

Sustituyendo “u” y “dx” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{Cosh(lnx)}{x}\ dx = \int \frac{Cosh\ u}{x}(x\ du) = \int Cosh\ u\ du = Senh\ u + C$$

$$\int \frac{Cosh(lnx)}{x}\ dx = Senh\ (lnx) + \ C$$

4) $\int (\mathbf{4x+4})\ \boldsymbol{Tanh}\ \ (\boldsymbol{x^2+2x-1})\boldsymbol{dx}$

$Haciendo\ u = x^2 + 2x - 1; du = (2x+2)dx; despejando\ dx = \frac{du}{2x+2}$

Sustituyendo “u” y “dx” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int (4x+4)\ Tanh\ \ (x^2+2x-1)dx = \int (4x+4) Tanh\ u\ \left(\frac{du}{2x+2}\right) = 2\int Tanh\ u\ du$$

$$\int (4x+4)\ Tanh\ \ (x^2+2x-1)dx = 2\ ln|Cosh(x^2+2x-1)| + C$$

5) $\int (\boldsymbol{Cosh^2\ x + Senh^2 x})\boldsymbol{dx}$

$\int (Cosh^2\ x + Senh^2 x)dx = \ \int Cosh\ 2x\ dx$ Aplicando una identidad hiperbólica

$Haciendo\ u = 2x; du = 2\ dx; despejando\ dx = \frac{du}{2}\ de\ la\ integral\ resultante,$

Sustituyendo “u” y “dx” en la integral resultante y simplificando, resulta:

$$\int (Cosh^2\ x + Senh^2 x)dx = \ \int Cosh\ u\ \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int Cosh\ u\ du = \frac{1}{2} Senh\ u + C$$

$$\int (Cosh^2\ x + Senh^2 x)dx = \frac{1}{2}\ Senh\ 2x + C$$

6) $\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{Csch\ 3x}}$

$\int \frac{dx}{Csch\ 3x} = \ \int \frac{1}{Csch\ 3x}\ dx = \int Senh\ 3x\ dx$ Aplicando una identidad hiperbólica

$Haciendo\ u = 3x; du = 3dx; despejando\ dx = \dfrac{du}{3}\ de\ la\ integral\ resultante,$

Sustituyendo "u" y "dx" en la integral resultante y simplificando, resulta:

$$\int \frac{dx}{Csch\ 3x} = \int Senh\ u\left(\frac{du}{3}\right) = \frac{1}{3}Cosh\ u + C = \frac{1}{3}Cosh\ 3x + C$$

Ejercicio 1.3.5

Resuelva cada una de las siguientes integrales:

1) $\int \frac{Cosh\ \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx$

2) $\int e^x Csch\ e^x\ Coth\ e^x\ dx$

3) $\int Sen\ 3x\ Sech^2(Cos\ 3x)dx$

4) $\int Coth\ 4x\ dx$

5) $\int \frac{4dx}{Csch\ 2x}$

6) $\int (Coth^2 x - 1)dx$

Solución al ejercicio 1.3.5

1) $2Senh\ \sqrt{x} + C$

2) – $Csch\ e^x + C$

3) $\frac{-1}{3}Tanh\ (Cosh\ 3x) + C$

4) $\frac{1}{4}ln|Senh\ 4x| + C$

5) $2Cosh\ 2x + C$

6) – $Coth\ x + C$

1.3.6 Integrales que dan como resultado funciones trigonométricas inversas e hiperbólicas Inversas.

A partir de las derivadas de las funciones trigonométricas inversas y de las funciones hiperbólicas inversas se obtienen las siguientes fórmulas de integración:

Si *"u"* es una función derivable de *"x"* y $\mathbf{a} > 0$ una constante.

Funciones trigonométricas inversas	Funciones hiperbólicas inversas
1. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \boldsymbol{Arc\ Sen\frac{u}{a} + C}$	1. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \boldsymbol{Arc\ Senh\frac{u}{a} + C}$
2. $\int \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{a^2+u^2}} = \boldsymbol{\frac{1}{a}Arc\ Tan\frac{u}{a} + C}$	2. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \boldsymbol{Arc\ Cosh\frac{u}{a} + C}$
	3. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \boldsymbol{\frac{1}{a}Arc\ Tanh\frac{u}{a} + C}$

3. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} Arc\ Sec \frac{u}{a} + C$	4. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a} Arc\ Sech \frac{u}{a} + C$ 5. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a} Arc\ Csch \frac{u}{a} + C$

Nota: Arc Sen x es equivalente a $\boldsymbol{Sen^{-1}x}$

Ejemplo: Resuelva cada una de las siguientes integrales:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

$Haciendo\ u^2 = x^2; u = x; du = dx; a^2 = 9; a = 3$ y sustituyendo en la integral, resulta:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = Arc\ Sen\left(\frac{u}{a}\right) + C = Arc\ Sen\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

2) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-4}}$

$Haciendo\ u^2 = e^{2x}; u = e^x; du = e^x dx; despejando\ dx = \frac{du}{e^x}; a^2 = 4; a = 2$

Sustituyendo “u”, “dx” y “a” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-4}} = \int \frac{e^x}{\sqrt{u^2-a^2}}\left(\frac{du}{e^x}\right) = \int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = Cosh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-4}} = Cosh^{-1}\left(\frac{e^x}{2}\right) + C$$

3. $\int \frac{4dx}{x\sqrt{9-4x^2}}$

$Haciendo\ u^2 = 4x^2; u = 2x; du = 2dx; despejando\ dx = \frac{du}{2}; a^2 = 9; a = 3$

Sustituyendo “u”, “dx” y “a” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{4dx}{x\sqrt{9-4x^2}} = \int \frac{4}{x\sqrt{a^2-u^2}}\left(\frac{du}{2}\right) = 4\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = 4\left(\frac{-1}{a}\right) Arc\ Sech\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{4dx}{x\sqrt{9-4x^2}} = \frac{-4}{3} Arc\ Sech\left(\frac{2x}{3}\right) + C$$

4) $\int \frac{dx}{9x^2+1}$

$Haciendo\ u^2 = 9x^2; u = 3x; du = 3dx; despejando\ dx = \frac{du}{3} : a^2 = 1; a = 1$

Sustituyendo “u”, “dx” y “a” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{dx}{9x^2+1} = \int \frac{1}{u^2+a^2}\left(\frac{du}{3}\right) = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}\right)Tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{9x^2+1} = \frac{1}{3}Tan^{-1}\left(\frac{3x}{1}\right) + C = \frac{1}{3}Tan^{-1}(3x) + C$$

5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x}}$

$Haciendo\ u^2 = x; u = \sqrt{x}; du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}; despejando\ dx = 2\sqrt{x}du; a^2 = 4; a = 2$

Sustituyendo “u”, “dx” y “a” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x}} = \int \frac{2\sqrt{x}du}{x\sqrt{a^2+u^2}} = 2\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = 2\left(\frac{-1}{a}\right)Arc\ Csch\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x}} = 2\left(\frac{-1}{2}\right)Arc\ Csch\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) + C = -Arc\ Csch\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) + C$$

6) $\int \frac{Sec^2 3x\, dx}{\sqrt{16+Tan^2 3x}}$

$Haciendo\ u^2 = Tan^2 3x; u = Tan\ 3x; du = Sec^2 3x(3dx);$
$despejando\ dx = \frac{du}{3Sec^2 3x};\ a^2 = 16; a = 4$

Sustituyendo “u”, “dx” y “a” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{Sec^2 3x\, dx}{\sqrt{16+Tan^2 3x}} = \int \frac{Sec^2 3x}{\sqrt{a^2+u^2}}\left(\frac{du}{3Sec^2 3x}\right) = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \frac{1}{3}Senh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{Sec^2 3x\, dx}{\sqrt{16+Tan^2 3x}} = \frac{1}{3}Senh^{-1}\left(\frac{Tan\ 3x}{4}\right) + C$$

Observa en los siguientes ejemplos que se puede hacer cuando aparece un trinomio general de 2° grado.

7) $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$

Un trinomio general de 2° grado ($ax^2 + bx + c$) siempre se puede expresar en alguna de las 3 formas: $K + u^2$, $K - u^2$, $u^2 - K$ donde $K = Constante\ positiva$ y "u" es un binomio, para hacerlo se aplica el procedimiento de completar el trinomio cuadrado perfecto, que consiste en lo siguiente:

1er. Paso: Sacar como factor común el coeficiente del término cuadrático (a), si es diferente de 1.

2do. Paso: Agregar la mitad del coeficiente del término lineal (b/a) elevada al cuadrado y restar la misma cantidad $[x^2 + 6x + (3)^2 + 10 - (3)^2]$
3er. Paso: Factorizar los primeros tres términos como un trinomio cuadrado perfecto y sumar los números restantes. $(x + 3)^2 + 1$
4° Paso: Multiplicar por el factor común (a), si es necesario.

Reexpresando la integral, queda:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 10} = \int \frac{dx}{(x + 3)^2 + 1}$$

$$Haciendo\ u^2 = (x + 3)^2; u = (x + 3); du = dx; a^2 = 1; a = 1\ de\ la\ integral\ resultante$$

Sustituyendo "u", "dx" y "a" en la integral resultante y simplificando, queda:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 10} = \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\ Arc\ Tan\left(\frac{u}{a}\right) + C = Arc\ Tan(x + 3) + C$$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

Completando un trinomio cuadrado perfecto:
1er.Paso: $-1(x^2 + 2x - 3)$
2do. Paso: $-1(x^2 + 2x + 1 - 3 - 1)$
3er. Paso: $-1[(x + 1)^2 - 4]$
4° Paso: $4 - (x + 1)^2$

Reexpresando la integral, queda:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 2x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x + 1)^2}}$$

$$Haciendo\ u^2 = (x + 1)^2; u = (x + 1); du = dx; a^2 = 4; a = 2$$

Sustituyendo "u", "dx" y "a" en la integral resultante y simplificando, queda:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 2x - x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = Sen^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C = Sen^{-1}\left(\frac{x + 1}{2}\right) + C$$

Ejercicio 1.3.6
Resuelva cada una de las siguientes integrales:

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+9}}$

4) $\int \frac{x\,dx}{x^4+9}$

5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{ln^2 x+4}}$

6) $\int \frac{Sen\ 2x\ dx}{Cos\ 2x\sqrt{9-Cos^2 2x}}$

7) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}-16}}$

8) $\int \frac{3dx}{x\sqrt{9-x}}$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+10}}$

10) $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}}$

Solución al ejercicio 1.3.6

1) $Arc\ Sec\ (x) + C$

2) $\frac{1}{4}Sen^{-1}\left(\frac{4x}{3}\right) + C$

3) $\frac{-1}{3}\ Arc\ Csch\left(\frac{e^x}{3}\right) + C$

4) $\frac{1}{6}Tan^{-1}\left(\frac{x^2}{3}\right) + C$

5) $Arc\ Senh\left(\frac{\ln x}{2}\right) + C$

6) $\frac{1}{6}Sech^{-1}\left(\frac{Cos\ 2x}{3}\right) + C$

7) $\frac{1}{2}Arc\ Cosh\left(\frac{e^{2x}}{4}\right) + C$

8) $-2Sech^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right) + C$

9) $Arc\ Senh\ (x+3) + C$

10) $-Sech^{-1}\ (x-2) + C$

Actividad No. 5	**Primero identifícate**	**En equipo- extra aula**
Propósito: Identificar la fórmula de la integral que involucra el cambio de variable y funciones trascendentales.		
Criterio de evaluación: Se evaluará al equipo que exponga la respuesta correcta.		
Tiempo estimado para la actividad: 1 hora clase		

Descripción de la actividad:
Determina la fórmula que corresponde para resolver cada integral propuesta e identifica "u" en cada una. (No resuelvas la integral).

1) $\int (2x-3)^3 dx$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$

3) $\int \frac{Sen(5x)}{4-Cos(5x)}dx$

4) $\int \frac{3}{e^{3x}}dx$

5) $\int Csch\,3xCoth\,3x\,dx$ 6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+25x^2}}$ 7) $\int \frac{2^x}{e^x}dx$ 8) $\int \frac{x}{x^2+4}dx$

9) $\int \frac{dx}{x^2+4}$ 10) $\int \frac{dx}{xln^2x}$ 11) $\int 4e^x\,dx$ 12) $\int \frac{dx}{Cos^2 3x}$

13) $\int e^x Coth(e^x)dx$ 14) $\int 2SenxCosxdx$ 15) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$ 16) $\int e^{(3x-2)}dx$

17) $\int Sen^2xCosx\,dx$ 18) $\int \frac{Csc^2x}{2^{Cotx}}dx$ 19) $\int Sec\pi xTan\pi x\,dx$ 20) $\int \frac{dx}{x\sqrt{ln^2x+1}}$

Actividad No. 6	**Recuérdame**	**En equipo- en el aula**
Propósito: Seleccionar el método de integración		
Criterio de evaluación: Rapidez de respuesta de los equipos, argumentación por equipo y contenido del reporte por equipo.		
Tiempo estimado para la actividad: 50 minutos		

Descripción de la actividad.

1) Formar equipos de 4 estudiantes en una sesión de clase.
2) Se entrega la actividad por equipo estipulando un tiempo de 20 minutos para resolver el problema I. de la actividad propuesta.
3) En los siguientes 5 minutos, hacer una discusión para comparar las soluciones y estar de acuerdo en las correctas.
4) Se continúa con la actividad dando 10 minutos para resolver el problema II. de la actividad propuesta.
5) En los siguientes 5 minutos, mediante una lluvia de ideas propiciar que el estudiante llegue a conclusiones, distinguiendo las estrategias matemáticas con las que puede contar.
6) Retroalimentación.

I. Evalúe cada una de las siguientes integrales:

1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$
2) $\int x\sqrt{x-1}\,dx$
3) $\int \frac{x}{Senx^2}\,dx$

Después de realizar los procedimientos de cada integral selecciones el inciso que corresponde a la solución.

Solución del 1)

a) $2\sqrt{1-x^3}+C$
b) $\frac{-2}{3}\sqrt{1-x^3}+C$
c) $-\sqrt{1-x^3}+C$

Solución del 2)

a) $(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^{\frac{5}{2}}+(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^{\frac{3}{2}}+\ \boldsymbol{C}$
b) $\frac{1}{5}\ (\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^{\frac{5}{2}}+\ \frac{1}{3}\ (\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^{\frac{3}{2}}+\ \boldsymbol{C}$
c) $\frac{2}{15}\ (\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^{\frac{3}{2}}\ (\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{2})+\ \boldsymbol{C}$

Solución del 3)
a) $\frac{1}{2}\ \boldsymbol{Ln}\left|\boldsymbol{Csc}\ \boldsymbol{x}^2-\ \boldsymbol{Cot}\ \boldsymbol{x}^2\right|+\ \boldsymbol{C}$
b) $\boldsymbol{Ln}\left|\boldsymbol{Csc}\ \boldsymbol{x}^2-\ \boldsymbol{Cot}\ \boldsymbol{x}^2\right|+\ \boldsymbol{C}$
c) $\boldsymbol{Ln}\ |\boldsymbol{Csc}\ \boldsymbol{u}-\boldsymbol{Cot}\ \boldsymbol{u}|+\ \boldsymbol{C}$

II. Analizar los procedimientos y exprese ¿Qué los distingue?

Elemento de competencia 3:
Relacionar la integral definida con la suma de Riemann para su interpretación geométrica.

Conocimiento previo: Teoremas sobre límites al infinito

Actividad No. 7	**Limítate al infinito**	**Individual - extra aula**
Propósito: Evaluar límites al infinito para activar conocimiento previo		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga los procedimientos y soluciones correctas.		
Tiempo estimado para la actividad: 30 minutos		

Descripción de la actividad:
Calcula el límite de cada función dada, si es que existe:

1) $lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+4\right)$

2) $lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}-5\right)$

3) $lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+5x-3}{4-2x^2}\right)$

4) $lim_{x\to\infty}\left[\frac{(3x+1)(2x-3)}{x^2}\right]$

5) $lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+1}{x+1}\right)$

1.4 Notación sigma

La notación sigma se utiliza para reducir la escritura de una suma de números. Se denota por:

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

En donde:
$\sum$ Es el símbolo de la sumatoria

i es el índice de la sumatoria y toma valores enteros consecutivos, desde m hasta n.
m y *n* son constantes llamadas límites de la sumatoria
f(i) es la función que genera los números a sumar.

Nota: Es común que otras letras se empleen para representar el índice de la sumatoria; por ejemplo, las letras *j, k, m, n,* etc.

Cuando la sumatoria está definida para la suma de una gran cantidad de números, se utilizan los siguientes Teoremas de Sumatorias para simplificar la operación de la suma.

Teoremas de Sumatorias
Sean *m* y *n* enteros positivos, *c*= constante
1. $\sum_{i=1}^{n} c\, f(i) = c \sum_{i=1}^{n} f(i)$
2. $\sum_{i=1}^{n} [f(i) \pm g(i)] = \sum_{i=1}^{n} f(i) \pm \sum_{i=1}^{n} g(i)$
3. $\sum_{i=1}^{n} f(i) = \sum_{i=1}^{m} f(i) + \sum_{i=m+1}^{n} f(i) \quad m < n$
4. $\sum_{i=1}^{n} c = nc$
5. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
6. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
7. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Ejemplo 1: Expresa en notación sigma las siguientes sumas:

a) $\mathbf{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{5} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \sqrt{20}}$

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{5} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \sqrt{20} = \sum_{i=1}^{20} \sqrt{i}$$

b) $\mathbf{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{200}}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{200} = \sum_{j=1}^{100} \left(\frac{1}{2j}\right)$$

c) Suma de los primeros 50 números impares consecutivos.
En este ejemplo primero se debe conocer la expresión que genere a los números impares, en este caso partimos de la expresión (*2k+1*)

$$1+3+5+7\ldots\ldots\ldots..99=\sum_{k=0}^{49}(2k+1)$$

También la expresión (*2k-1*) genera los números impares, pero al considerarla se deben cambiar los límites de la sumatoria, o sea:

$$1+3+5+7\ldots\ldots\ldots..99=\sum_{k=1}^{50}(2k-1)$$

Ejemplo 2: Calcula cada una de las siguientes sumas, si es necesario utilice los Teoremas de las sumatorias.

a) $\sum_{\boldsymbol{i=-1}}^{\boldsymbol{6}}(\boldsymbol{3i+2})$

Generando los números que se van a sumar, sustituyendo los valores de *i* =-1,0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 en (*3i*+2), resulta:

$$\sum_{i=-1}^{6}(3i+2)=-1+2+5+8+11+14+17+20=76$$

b) $\sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\boldsymbol{5}}\boldsymbol{Cos}\ \left(\boldsymbol{n\frac{\pi}{2}}\right)$

Generando los números que se van a sumar, sustituyendo los valores de *n* = 0, 1, 2, 3, 4, 5 en $Cos\ \left(n\frac{\pi}{2}\right)$, resulta:

$$\sum_{n=0}^{5}Cos\ \left(n\frac{\pi}{2}\right)=Cos(0)+Cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+Cos(\pi)+Cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+Cos(2\pi)+Cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{5}Cos\ \left(n\frac{\pi}{2}\right)=1+0-1+0+1+0=1$$

c) $\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{30}}(\boldsymbol{i-3})^{\boldsymbol{2}}$

Desarrollando el binomio, queda:

$$\sum_{i=1}^{30}(i-3)^2=\sum_{i=1}^{30}(i^2-6i+9)$$

Aplicando el Teorema 2 de las sumatorias

$\sum_{i=1}^{30}(i-3)^2 = \sum_{i=1}^{30} i^2 - \sum_{i=1}^{30} 6i + \sum_{i=1}^{30} 9$

Aplicando el Teorema 1 en la segunda sumatoria y el Teorema 4, con *n = 30* en la tercera sumatoria, queda:

$$\sum_{i=1}^{30}(i-3)^2 = \sum_{i=1}^{30} i^2 - 6\sum_{i=1}^{30} i + (30)(9)$$

Aplicando el Teorema 6 en la primera sumatoria y el Teorema 5 en la segunda sumatoria, ambos con *n* = 30, resulta:

$$\sum_{i=1}^{30}(i-3)^2 = \frac{30(31)(61)}{6} - 6\left(\frac{(30)(31)}{2}\right) + 270 = 9\,455 - 2\,790 + 270$$

$$\sum_{i=1}^{30}(i-3)^2 = 6\,935$$

Ejercicio 1.4

I. Expresa en notación sigma las siguientes sumas:

1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \ldots \ldots . . \frac{1}{15}$ 2) $-1 + 2 + 5 + 8 + \cdots \ldots . . 23$

3) Suma de los primeros 50 números pares consecutivos

II. Calcula las sumas indicadas, si es necesario utilice los Teoremas de la Sumatoria.

4) $\sum_{k=1}^{5} k$ 5) $\sum_{n=1}^{20} 2$ 6) $\sum_{j=1}^{25} 5j$

7) $\sum_{i=1}^{10}(3i-4)$ 8) $\sum_{i=1}^{100}\left(\frac{i+3}{n^2}\right)$ 9) $\sum_{i=1}^{12}(i^2-1)$

10) $\sum_{i=1}^{10}(i-1)^2$ 11) $\sum_{i=1}^{4}(i+1)^3$ 12) $\sum_{i=3}^{40}(3i+2)$

Solución al ejercicio 1.4

1) $\sum_{i=1}^{15}\left(\frac{1}{i}\right)$ 2) $\sum_{i=1}^{9}(3i-4)$ 3) $\sum_{i=1}^{50} 2i$ 4)15

5) 40 6) 1 625 7) 125 8) $\frac{5350}{n^2}$

9) 638 10) 285 11) 224 12) 2 527

Actividad No. 8	Reflexiona y suma	En equipo – en el aula
Propósito: Aplicar la notación sigma y sus teoremas en el cálculo de sumas.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga los procedimientos correctos		
Tiempo estimado para la actividad: 10 minutos		

Descripción de la actividad:

1) En equipos de 3 estudiantes como máximo se reflexionará sobre el procedimiento requerido para resolver las sumatorias propuestas.

a) $\sum_{i=-3}^{50}(2i+1)$ b) $\sum_{i=4}^{60}(2i-3)^2$ c) $\sum_{i=1}^{30}\left(\frac{1}{k}\right)$

2) Se comentarán las conclusiones en el aula.

3) Retroalimentación.

1.5 Integral definida

Definición.

Sea f una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. La integral definida de f de a a b se representa por: $\int_a^b f(x)dx$ y se define:

1. $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ Para una partición particular.

En donde: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $Ci = a + i\Delta x$

2. $\int_a^b f(x)dx = \lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ Para una partición cualquiera.

En donde: a se llama límite inferior, b se llama limite superior, $f(x)$ se llama integrando.

Interpretación geométrica.

Si $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$ entonces la integral $\int_a^b f(x)dx$ se interpreta como el área de la región acotada por la función $f(x)$, el eje x y las rectas $x = a, x = b$.

Nuestro objetivo es evaluar una integral definida utilizando la primera definición y ver su interpretación geométrica.

Ejemplo 1

Evaluar la integral definida dada utilizando la definición 1 y mostrar que es lo que representa en forma geométrica

$$\int_1^3 (2x+1)dx$$

Se toma una partición regular del intervalo [1,3] con n subintervalos de magnitud $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$, $c_i = 1 + i * \Delta x$, ahora se evalúa:
$f(c_i) = f(1 + i * \Delta x) = 2(1 + i\Delta x) + 1$, ahora efectuamos la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}[2(1+i\Delta x)+1]\Delta x = \sum_{i=1}^{n}[3\Delta x + 2i(\Delta x)^2]$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} 3\Delta x + 2(\Delta x)^2 \sum_{i=1}^{n} i = (3\Delta x)n + 2(\Delta x)^2 \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

Se sustituye el valor de $\Delta x = \frac{2}{n}$, resulta:

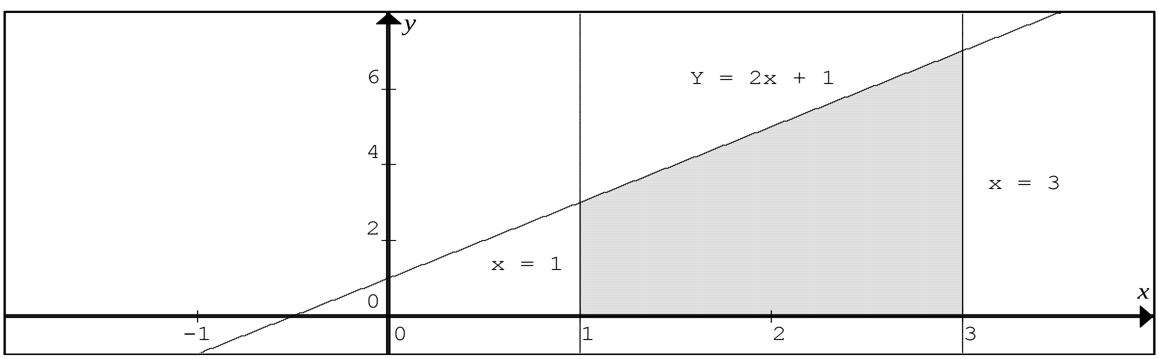
$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = 3\left(\frac{2}{n}\right)n + 2\left(\frac{2}{n}\right)^2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = 6 + 2\left(\frac{4}{n^2}\right)\left[\frac{n^2+n}{2}\right] = 6 + 4 + \frac{4}{n} = 10 + \frac{4}{n}$$

Luego se aplica el límite cuando $n \to \infty$

$\int_1^3 (2x+1)dx = \lim_{n\to\infty}\left[10 + \frac{4}{n}\right] = 10 + 0 = 10$, por lo tanto

$$\int_1^3 (2x+1)dx = 10$$

Para ver la interpretación geométrica se traza la grafica del integrando, $f(x) = 2x + 1$



En la figura se muestra la región y esta se puede separar en dos regiones R_1 y R_2, la primera es un triángulo rectángulo y la segunda es un rectángulo, por lo tanto:

Área de $R_1 = \frac{(2)(4)}{2} = 4$

Área de $R_2 = (2)(3) = 6$

Área total = área de R_1 + área de R_2= 4 + 6

Área total = 10

Se concluye, como se dijo en la teoría correspondiente, que si $f(x) \geq 0 \quad para\ toda$ $x \in [a,b]$, entonces:

$\int_a^b f(x)dx$ = área de la región acotada por: el eje x, las rectas x = a, x = b y por la Gráfica de $y = f(x)$

Ejemplo 2

Evaluar la integral definida dada utilizando la definición 1 y mostrar que es lo que representa en forma geométrica

$$\int_0^1 (2x^2 - 1)dx$$

Se toma una partición regular del intervalo [0,1] con n subintervalos de magnitud $\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$, $c_i = 0 + i * \Delta x$, ahora se evalúa:
$f(c_i) = f(i * \Delta x) = 2(i\Delta x)^2 - 1$, ahora efectuamos la suma de Riemann

$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}[2(i\Delta x)^2 - 1]\Delta x = \sum_{i=1}^{n}[2i^2(\Delta x)^3 - \Delta x]$

$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = 2(\Delta x)^3 \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n}[\Delta x]$

$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = 2(\Delta x)^3 \ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n\ [\Delta x]$, se sustituye el valor de $\Delta x = \frac{1}{n}$

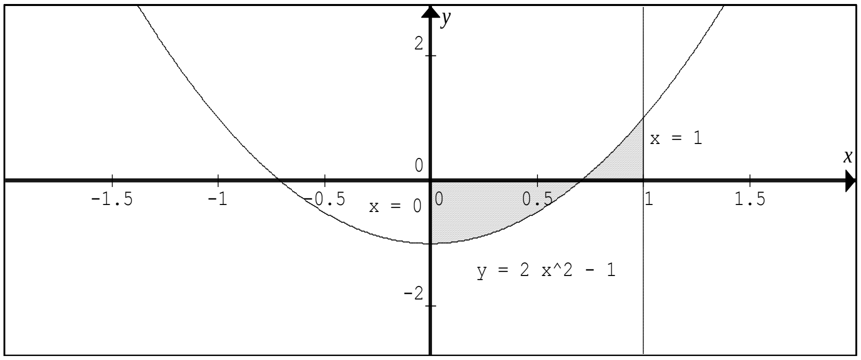
$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \frac{1}{3}\frac{1}{n^3}(2n^3 + 3n^2 + n) - n\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2}$

Luego se aplica el límite cuando $n \to \infty$

$\int_0^1 (2x^2 - 1)dx = \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2}\right] = -\frac{1}{3}$, por lo tanto

$\int_0^1 (2x^2 - 1)dx = -\frac{1}{3}$

Para ver la interpretación geométrica se traza la gráfica del integrando, $f(x) = 2x^2 - 1$



Si observamos las dos regiones sombreadas, notaremos que una está bajo el eje X, por lo tanto el área para esa región tiene signo negativo y en la región que está por encima del eje X el área tiene signo positivo, finalmente se sumaron esas áreas con su respectivo signo obteniendo un resultado negativo porque el área que está bajo el eje X es mayor que la que está por encima de él.

Ejercicio 1.5

Evaluar cada una de las integrales definidas aplicando la definición, utilizando una partición regular y observar su interpretación geométrica.

1. $\int_{-1}^{1}(2x+3)dx$
2. $\int_{0}^{2} x^2 dx$
3. $\int_{0}^{2}(x^2-1)dx$
4. $\int_{1}^{2}(x-2)dx$

Solución al ejercicio 1.5

1. 6
2. 8/3
3. 2/3
4. -1/2

Elemento de competencia 4:

Aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo mediante su relación con la antiderivada para evaluar integrales definidas.

Conocimiento previo: Evaluación de funciones.

Actividad No. 9	**Calcula y gana**	**Individual – extra aula**
Propósito: Evaluación de funciones para activar conocimiento previo		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga los procedimientos y la solución correcta a cada ejercicio propuesto		

Tiempo estimado para la actividad: 1 hora

Descripción de la actividad:

Evalúa cada una de las siguientes funciones:

1) $f(x) = -\frac{5}{3}x^2 \ en \ x = -3$

2) $g(x) = x^{3/2} \ en \ x = 4$

3) $h(x) = \sqrt[3]{x^2} \ en \ x = -8$

4) $f(x) = 5 + Ln(x) \quad en \ x = 1$

5) $h(x) = Ln(x^2) \quad en \ x = e$

6) $g(x) = e^{Ln(x)} \quad en \ x = 3$

7) $f(x) = Cos(x) \ en \ x = \pi$

8) $g(x) = Tan(x) \ en \ x = \frac{\pi}{4}$

9) $f(x)$ = Csc(x) $\quad en \ x = \frac{\pi}{2}$

10) $h(x) = ArcSen(x) \ en \ x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

11) $h(x) = e^{\frac{x}{3}} \qquad en \ x = 0$

12) $g(x) = Sec^2(x) \quad en \ x = 0$

13) $f(x) = Senh(x) \quad en \ x = 0$

14) $g(x) = Cot(x) \qquad en \ x = \frac{3\pi}{4}$

15) $h(x) = Cos^{-1}(2x) \ en \ x = \frac{1}{2}$

1.6 Teorema fundamental del cálculo

Sea *f* una función continua en el intervalo $[a, b]$. Si *F* es una antiderivada de *f* en $[a, b]$, se establece que:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

En donde: *a* es llamado límite inferior y *b* es llamado límite superior.
Las siguientes son propiedades de la integral definida:

Propiedades de la integral definida
Sean *f* y *g* funciones integrables en $[a, b]$ y *K* una constante, entonces:
1) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
2) $\int_a^a f(x)dx = 0$
3) $\int_a^b K\,f(x)dx = K\int_a^b f(x)dx$

4) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^K f(x)dx + \int_K^b f(x)dx$ siempre que f sea continua en $[a, K] y\ [K, b]$

Ejemplo: Resuelva cada una de las siguientes integrales definidas:

1) $\boldsymbol{\int_{-1}^{2}(3 - 2x - x^2)dx}$

$$\int_{-1}^{2}(3 - 2x - x^2)dx = \left[3x - \frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

$$\int_{-1}^{2}(3 - 2x - x^2)dx = \left[3(2) - (2)^2 - \frac{(2)^3}{3}\right] - \left[3(-1) - (-1)^2 - \frac{(-1)^3}{3}\right]$$

$$\int_{-1}^{2}(3 - 2x - x^2)dx = \left(6 - 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(-3 - 1 + \frac{1}{3}\right)$$

$$\int_{-1}^{2}(3 - 2x - x^2)dx = \left(2 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3}\right) = \quad 6 - \frac{9}{3} \quad = \ 6 - 3 \quad = \ 3$$

2) $\boldsymbol{\int_{1}^{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\right)dx}$

$$\int_{1}^{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\right)dx = \int_{1}^{4} x^{-1/2}dx - 2\int_{1}^{4} x^{1/2}dx = 2\sqrt{x}\Big]_1^4 - \frac{4}{3}x^{3/2}\Big]_1^4$$

$$\int_{1}^{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\right)dx = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} - \frac{4}{3}(4)^{3/2} - \left[\frac{-4}{3}(1)^{3/2}\right] - 4 - 2 - \left(\frac{4}{3}\right)8 + \frac{4}{3}$$

$$\int_{1}^{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\right)dx = 2 - \frac{32}{3} + \frac{4}{3} = \frac{-22}{3}$$

Cuando en una integral definida se hace una sustitución, los límites de integración se pueden cambiar de acuerdo a la sustitución “u” o dejarlos como estaban. En los siguientes ejemplos se ilustra lo anterior

3) $\boldsymbol{\int_{0}^{1}\sqrt{x+3}\,dx}$

$Haciendo\ u = x + 3; du = dx; sustituyendo$ "u" y "dx", $resulta$:

$Si\ u = x + 3; cuando\ x = 0\ el\ valor\ de\ u = 3\ y\ cuando\ x = 1\ el\ valor\ de\ u = 4$

$$\int_0^1 \sqrt{x+3}\, dx = \int_3^4 u^{1/2}\, du = \left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_3^4 = \frac{2}{3}\left[4^{3/2} - 3^{3/2}\right] = \frac{2}{3}\left(8 - 3\sqrt{3}\right)$$

$$\int_0^1 \sqrt{x+3}\, dx = \frac{16}{3} - 2\sqrt{3}$$

O bien, se utiliza la antiderivada en x y se sustituyen los límites dados en la integral definida.

$$\int_0^1 \sqrt{x+3}\, dx = \left[\frac{2}{3}\,(x+3)^{3/2}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3}\,(4)^{3/2}\right] - \left[\frac{2}{3}\,(3)^{3/2}\right] = \frac{16}{3} - 2\sqrt{3}$$

4) $\int_0^{ln2} e^{3x}\, dx$

$Haciendo\ u = 3x; du = 3dx; despejando\ dx = \frac{du}{3};$
Sustituyendo “u” y “dx” en la integral con límites de 0 a 3ln2, resulta:

$$\int_0^{ln2} e^{3x}\, dx = \int_0^{3ln2} e^u \left(\frac{du}{3}\right) = \left[\frac{1}{3}\, e^u\right]_0^{3\ln 2} = \frac{1}{3}\left[e^{3\ln 2} - e^0\right]$$

$$\int_0^{ln2} e^{3x}\, dx = \frac{1}{3}\left[e^{ln2^3} - 1\right] = \frac{1}{3}[e^{ln8} - 1] = \frac{1}{3}[8-1] = \frac{7}{3}$$

O bien, sustituyendo “u” en la antiderivada y los límites dados en la integral definida:

$$\int_0^{ln2} e^{3x}\, dx = \left[\frac{1}{3}\, e^{3x}\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{3}\left[e^{3\ln 2} - e^0\right] \frac{1}{3}\left[e^{\ln 8} - 1\right] = \frac{1}{3}\,[8-1] = \frac{7}{3}$$

5) $\int_0^{\pi/12} Sec\, 3x\, dx$

$$Haciendo\ u = 3x; du = 3dx; despejando\ dx = \frac{du}{3}$$
Sustituyendo “u” y “dx” en la integral con límites de 0 a $\frac{\pi}{4}$, resulta:

$$\int_0^{\pi/12} Sec\, 3x\, dx = \int_0^{\pi/4} Secu\left(\frac{du}{3}\right) = \left[\frac{1}{3}\ln|Sec\, u + Tan\, u|\right]_0^{\pi/4}$$

$$\int_0^{\pi/12} Sec\ 3x\ dx = \frac{1}{3} ln \left| Sec\left(\frac{\pi}{4}\right) + Tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| - \frac{1}{3} ln|Sec(0) + Tan(0)|$$

$$\int_0^{\pi/12} Sec\ 3x\ dx = \frac{1}{3} ln \left| \frac{1}{Cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} + 1 \right| - \frac{1}{3} ln \left| \frac{1}{Cos(0)} + 0 \right|$$

$$\int_0^{\pi/12} Sec\ 3x\ dx = \frac{1}{3} ln \left| \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + 1 \right| - \frac{1}{3} ln \left| \frac{1}{1} \right| = \frac{1}{3} \ln\left|\sqrt{2} + 1\right| - \frac{1}{3} ln|1|$$

$$\int_0^{\pi/12} Sec\ 3x\ dx = \frac{1}{3} \ln\left|\sqrt{2} + 1\right|$$

6) $\int_0^5 |x-3| dx$

La función "valor absoluto de x-3" se expresa, por definición, como:

$$|x-3| = \begin{cases} -(x-3) & x < 3 \\ (x-3) & x \geq 3 \end{cases}$$

Entonces se aplica la propiedad 5 de la integral definida y la integral se expresa como:

$$\int_0^5 |x-3| dx = \int_0^3 -(x-3)dx + \int_3^5 (x-3)dx = -\left(\frac{x^2}{2} - 3x\right)\Bigg|_0^3 + \left(\frac{x^2}{2} - 3x\right)\Bigg|_3^5$$

$$\int_0^5 |x-3| dx = -\left(\frac{9}{2} - 9\right) + \left(\frac{25}{2} - 15\right) - \left(\frac{9}{2} - 15\right) = \frac{25}{2}$$

7) Costo: El costo total *C* (en dólares) de compra y mantenimiento de una pieza de equipo durante *x* años es:

$$\boldsymbol{C(x) = 5\,000\left(25 + 3\int_0^x t^{\frac{1}{4}}\, dt\right)}$$

a) Efectuar la integración para escribir *C* como una función de *x*.
b) Encontrar *C*(1), *C*(5) y *C*(10)

Solución:

a) Se determina la función de costo resolviendo la integral involucrada, esto es:

$$C(x) = 125\,000 + 15\,000 \int_0^x t^{1/4} dt$$

$$C(x) = 125\,000 + 15\,000\left(\frac{4}{5}\right)t^{5/4}\Big|_0^x$$

$$\boldsymbol{C(x) = 125\,000 + 12\,000x^{5/4}}$$

b) Evaluando $C(1), C(5) y\ C(10)$, resulta:

$C(1) = 125\,000 + 12\,000(1)^{5/4} = \mathbf{137\,000}$

$C(5) = 125\,000 + 12000(5)^{5/4} = \mathbf{214\,720.93}$

$C(10) = 125\,000 + 12\,000(10)^{5/4} = \mathbf{338\,393.53}$

8) Fuerza: La fuerza F (en Newtons) de un cilindro hidráulico en una prensa es proporcional al cuadrado de *Sec x*, donde *x* es la distancia (en metros) que el cilindro se desplaza en su ciclo. El dominio de F es $[0, \pi/3]$ y F(0) = 500
a) Encontrar F como una función de *x*.
b) Determinar la fuerza media ejercida por la prensa sobre el intervalo $[0, \pi/3]$.

Solución:

a) La función de fuerza está dada por
:

$$F = K\,Sec^2 x$$

Se sustituyen las condiciones iniciales para calcular el valor de la constante K, es decir, para *x* = 0, F = 500. Despejando K, resulta:

$$K = \frac{F}{Sec^2 x} = \frac{500}{Sec^2 0} = 500$$

Por lo tanto, la función de fuerza es:

$$F(x) = 500\,Sec^2 x$$

b) La fuerza media ejercida en el intervalo $[0, \pi/3]$ se calcula por:

$$F_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx$$

$$F_m = \frac{1}{\pi/3}\int_0^{\pi/3} 500Sec^2 x\, dx$$

$$F_m = \frac{1\,500}{\pi}[Tan\, x]_0^{\pi/3}$$

$$\boldsymbol{F_m = \frac{1\,500\sqrt{3}}{\pi}\,N}$$

Ejercicio 1.6
Resuelva cada una de las siguientes integrales definidas:

1) $\int_0^8 \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 4\sqrt[3]{x}\right) dx$

2) $\int_{-1}^{1} \left(\frac{x^3-8}{x-2}\right) dx$

3) $\int_{-1}^{1} (x^2+2)^2\, dx$

4) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x}$

5) $\int_0^3 \frac{2x}{x^2+1}\, dx$

6) $\int_0^{\pi/2} Sen\, 2x\, dx$

7) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} Csc\, x\, dx$

8) $\int_1^3 Senh\left(\frac{x}{2}\right) dx$

9) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

10) $\int_{-1}^{3} |x-1| dx$

11) **Probabilidad**: La probabilidad de que una persona recuerde entre *a y b porciento* del material aprendido en un experimento es:

$$P_{a,b} = \int_{\frac{a}{100}}^{\frac{b}{100}} \frac{15}{4}\, x\sqrt{1-x}dx$$

Donde x representa el porcentaje recordado. ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo elegido al azar recuerde entre 50 y 75% del material?

12) **Experimento de la aguja de Buffon**: Sobre un plano horizontal se trazan rectas paralelas separadas por una distancia de 2 pulgadas. Una aguja se lanza aleatoriamente sobre el plano. La probabilidad de que la aguja toque una recta está dada por:

$$P = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} Sen\theta\, d\theta$$

Donde θ es el ángulo entre la aguja y cualquiera de las rectas paralelas. Determinar esta probabilidad.

13) **Temperatura**: La temperatura en grados Fahrenheit en una casa está dada por:

$$T = 72 + 12\, Sen\left[\frac{\pi(t-8)}{12}\right]$$

Donde t es el tiempo en horas, con t = 0 representando la media noche. El costo horario de refrigeración de una casa es de 0.10 dólares por grado.

a) Encontrar el costo C de refrigeración de la casa si el termostato se ajusta en 72°F calculando la integral

$$C = 0.1\int_8^{20} \left[72 + 12Sen\left[\frac{\pi(t-8)}{12}\right] - 72\right] dt$$

b) Encontrar el ahorro al reajustar el termostato en 78°F calculando la integral

$$C = 0.1\int_{10}^{18}\left[72 + 12Sen\left[\frac{\pi(t-8)}{12}\right] - 78\right]dt$$

Solución al ejercicio 1.6

1) -36	2) $\frac{26}{3}$	3) $\frac{166}{15}$	4) 1	5) $ln\lvert 10\rvert$
6) 1	7) 0	8) 2.44	9) $\frac{\pi}{3}$	10) 4
11) 0.353	12) 0.63662	13) a) $9.17; b) $6.05		

Actividad No. 10	**Integrales en la realidad**	**Individual – extra aula**
Propósito: Aplicación de integrales indefinidas y definidas en problemas de ingeniería.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga los procedimientos y la solución correcta a cada ejercicio propuesto		
Tiempo estimado para la actividad: 1 hora		

Descripción de la actividad:

Resolver los siguientes problemas:

1. Tiro vertical hacia arriba.
¿Con qué velocidad inicial debe lanzarse un objeto hacia arriba (desde el nivel del suelo) para alcanzar la parte superior del Faro del Comercio, situado en la Macroplaza de la Cd. de Monterrey? El Faro del Comercio tiene una altura aproximada de 70.6 metros.

2. Ciclo respiratorio.
Después de hacer ejercicio durante un tiempo determinado, una persona tiene un ciclo respiratorio para el cual la tasa de admisión de aire está dada por: $v = 1.75\ Sen\left(\frac{\pi t}{2}\right) en\ litros\ por\ minuto$.
Calcular el volumen, en litros, del aire inhalado durante un ciclo, integrando la función sobre el intervalo $0 \leq t \leq 3$ minutos.

3. Precio medio.
La ecuación para la demanda de un producto está dada por: $P = \frac{90\ 000}{3x+400}$. Si el precio medio está dado por $P_m = \frac{1}{b-a}\int P(x)dx$, determinar su precio medio en el intervalo $[30,40]$.

4. Probabilidad.
El tiempo medio de espera "x" (en minutos) en una tienda de autoservicio está dado por la solución de la ecuación $\int_0^x 0.3e^{-0.3t}dt = \frac{1}{2}$. Resuelva la ecuación.

Capítulo 2. Métodos de integración

Competencia Particular (2):

Analizar las características del integrando a través de sus elementos para seleccionar y aplicar el método más adecuado en la solución de integrales definidas e indefinidas.

Elemento de competencia 5:

Identificar las características de cada método mediante el análisis del integrando para evaluar integrales definidas e indefinidas.

Introducción

Al iniciar este capítulo, el estudiante ya debe estar familiarizado con el siguiente resultado:

Si $\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad ==> \quad \int f(ax)\,dx = \frac{F(ax)}{a} + C; \qquad a \neq 0$

Por ejemplo:

1) Si $\int Cos\ x\ dx = Sen\ x + C \quad ==> \quad \int Cos\ 2x\ dx = \frac{1}{2} Sen\ 2x + C$

2) Si $\int e^x dx = e^x + C \quad ==> \quad \int e^{-3x} dx = \frac{-1}{3} e^{-3x} + C$

3) Si $\int \tan x\ dx = ln|Sec\ x| + C \quad ==> \quad \int \tan 5x\ dx = \frac{1}{5} Ln|Sec\ 5x| + C$

Se continúa ahora con las técnicas o métodos de integración.

2.1 Integración por partes

El método de integración por partes se utiliza para solucionar un gran número de integrales, donde el integrando está formado por el producto de dos funciones.

Este método, permite reescribir la integral dada como el producto de dos funciones menos una integral que es más sencilla de calcular que la integral original, como se observa en la fórmula para calcular integrales por el método de integración por partes:

$$\int \boldsymbol{u * dv = u * v - \int v * du}$$

El estudiante puede considerar apoyarse en el acrónimo LIATE para la selección de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{dv}$ el cual sugiere elegirlos de acuerdo al orden de aparición de "**LIATE**" (**L**ogarítmicas, trigonométricas **I**nversas, **A**lgebraicas, **T**rigonométricas y **E**xponenciales). En el caso de que esta elección no funcione, podría considerar que u debe ser la parte fácilmente derivable del integrando y dv la parte fácilmente integrable o intentar todos los órdenes posibles.

Nota: En los siguientes ejemplos; en cada integral indefinida que se resuelve debe sumarse la constante de integración. Para fines prácticos, se omitirán las constantes durante el procedimiento de solución y únicamente se sumará C al resultado final. La constante C representará la suma de todas las demás constantes.

Ejemplo: Calcule las siguientes integrales

1) $\int \boldsymbol{x\, e^{-3x}\ dx}$

Eligiendo como u la función algebraica y como dv el resto del integrando; $u = x$, $dv = e^{-3x}\, dx$, $du = dx$; , $v = -\frac{1}{3}e^{-3x}$

Aplicando la fórmula de integración por partes $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$, queda:

$$\int x\, e^{-3x}\ dx = (x)\left(-\frac{1}{3}\ e^{-3x}\right) - \int \left(-\frac{1}{3}\ e^{-3x}\right)(dx)$$

$$\int x\, e^{-3x}\ dx = -\frac{x}{3}\ e^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}\, dx$$

$$\int x\, e^{-3x}\ dx = -\frac{x}{3}\ e^{-3x} + \frac{1}{3}\left(\frac{e^{-3x}}{-3}\right) + C$$

$$\int x\, e^{-3x}\ dx = -\frac{x}{3}\ e^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C$$

2) $\int_1^2 \boldsymbol{x \ln x\ dx}$

Eligiendo como u la función logarítmica y como dv el resto del integrando;

$$u = \ln x, \qquad dv = x\, dx, \qquad du = \frac{1}{x}\ dx, \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$, queda:

$$\int_1^2 x \ln x \ dx = (\ln x)\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{1}{x}\ dx\right) = \frac{x^2}{2}\ln x\bigg|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\, dx$$

$$\int_1^2 x \ln x \ dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^2 = \left[\frac{(2)^2}{2}\ln(2) - \frac{4}{4}\right] - \left[\frac{(1)^2}{2}\ln(1) - \frac{1}{4}\right]$$

$$\int_0^1 x \ln x \ dx = 2\ln(2) - 1 - 0 + \frac{1}{4} = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 x \ln x \ dx = \ln 4 - \frac{3}{4}$$

3) $\int \boldsymbol{Sen^{-1}\, 3x\, dx}$

Eligiendo la función inversa como u y dx como dv.
$u = Sen^{-1}3x, \qquad dv = dx \qquad du = \dfrac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}\ dx\,, \qquad v = x$

Aplicando la fórmula de integración por partes $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$, queda:

$$\int Sen^{-1}\, 3x\, dx = (Sen^{-1}3x)(x) - \int (x)\left(\frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}\ dx\right)$$

$$\int Sen^{-1}\, 3x\, dx = x(Sen^{-1}3x) - \int \frac{3x}{\sqrt{1-9x^2}}\ dx$$

Haciendo cambio de variable en la integral resultante:
$u = 1 - 9x^2,\ du = -18x\, dx,\ dx = \frac{du}{-18\, x},$

sustituyendo u y dx en la integral, queda:

$$\int Sen^{-1}\, 3x\, dx = x(Sen^{-1}3x) - \int \frac{3x}{u^{\frac{1}{2}}}\frac{du}{-18\, x} = x(Sen^{-1}3x) + \frac{1}{6}\int \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int Sen^{-1}\, 3x\, dx = x(Sen^{-1}3x) + \frac{1}{6}\int u^{-\frac{1}{2}}\, du = x(Sen^{-1}3x) + \frac{2}{6}(1-9x^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$\int Sen^{-1}\, 3x\, dx = x(Sen^{-1}3x) + \frac{1}{3}(1-9x^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

4) $\int \boldsymbol{x^2\, Cos\, 2x\, dx}$

Eligiendo la función algebraica como u y el resto del integrando como dv,

$$u = x^2, \qquad dv = Cos\ 2x\ dx, \qquad du = 2x\ dx, \qquad v = \frac{1}{2} Sen\ 2x$$

Aplicando la fórmula de integración por partes $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$, queda:

$$\int x^2\ Cos\ 2x\ dx = (x^2)\left(\frac{1}{2} Sen\ 2x\right) - \int \left(\frac{1}{2} Sen\ 2x\right)(2x\ dx)$$

$$\int x^2\ Cos\ 2x\ dx = \frac{x^2}{2} Sen\ 2x - \int x\ (Sen\ 2x)\ dx$$

Para la segunda integral resultante se aplica la integración por partes de nuevo,

$$u = x, \qquad dv = Sen\ 2x\ dx, \qquad du = dx, \qquad v = -\frac{1}{2}\ Cos\ 2x$$

Aplicando la fórmula de integración por partes $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$, en la segunda integral, queda:

$$\int x^2\ Cos\ 2x\ dx = \frac{x^2}{2} Sen\ 2x - \left[(x)\left(-\frac{1}{2}\ Cos\ 2x\right) - \int \left(-\frac{1}{2}\ Cos\ 2x\right)(dx)\right]$$

$$\int x^2\ Cos\ 2x\ dx = \frac{x^2}{2} Sen\ 2x + \frac{x}{2} Cos\ 2x - \frac{1}{2} \int Cos\ 2x\ dx$$

$$\int x^2\ Cos\ 2x\ dx = \frac{x^2}{2} Sen\ 2x + \frac{x}{2} Cos\ 2x - \frac{1}{4}\ Sen\ 2x + C$$

5) $\int \boldsymbol{e^{2t}\ Sen\ t\ dt}$

Eligiendo la función trigonométrica como u y el resto del integrando como dv,

$$u = Sen\ t, \qquad dv = e^{2t}\ dt, \qquad du = Cos\ t\ \ dt, \qquad v = \frac{1}{2} e^{2t}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$, en la segunda integral, queda:

$$\int e^{2t}\ \ Sen\ t\ dt = (Sen\ t)\left(\frac{1}{2} e^{2t}\right) - \int \left(\frac{1}{2} e^{2t}\right)\ (Cos\ t\ \ dt)$$

$$\int e^{2t}\ \ Sen\ t\ dt = \frac{1}{2} e^{2t}\ Sen\ t - \frac{1}{2} \int (e^{2t})\ \ (Cos\ t\ \ dt)$$

Para la segunda integral, se elige la función trigonométrica como u y el resto del integrando como dv,

$u = Cos\ t, \qquad dv = e^{2t}\ dt, \qquad du = -Sen\ t\ dt, \qquad v = \frac{1}{2}e^{2t}$

Aplicando nuevamente la fórmula de integración por partes $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$, en la segunda integral, queda:

$$\int e^{2t}\ Sen\ t\ dt = \frac{1}{2}e^{2t}\ Sen\ t - \frac{1}{2}\left[(Cos\ t)\left(\frac{1}{2}e^{2t}\right) - \int \left(\frac{1}{2}e^{2t}\right)(-Sen\ t\ dt)\right]$$

$$\int e^{2t}\ Sen\ t\ dt = \frac{1}{2}e^{2t}\ Sen\ t - \frac{1}{4}(Cos\ t)(e^{2t}) - \frac{1}{4}\int e^{2t}\ Sen\ t\ dt$$

Pasando la última integral al lado izquierdo, queda:

$$\int e^{2t}\ Sen\ t\ dt + \frac{1}{4}\int e^{2t}\ Sen\ t\ dt = \frac{1}{2}e^{2t}\ Sen\ t - \frac{1}{4}(Cos\ t)(e^{2t})$$
$$\frac{5}{4}\int e^{2t}\ Sen\ t\ dt = \frac{1}{2}e^{2t}\ Sen\ t - \frac{1}{4}(Cos\ t)(e^{2t})$$

Se multiplica por $\frac{4}{5}$ en ambos lados y resulta:

$$\int e^{2t}\ Sen\ t\ dt = \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\ e^{2t}\ Sen\ t\right) - \left(\frac{4}{5}\right)\frac{1}{4}(Cos\ t)(e^{2t})$$

$$\int e^{2t}\ Sen\ t\ dt = \left(\frac{2}{5}\right)(e^{2t}\ Sen\ t) - \left(\frac{1}{5}\right)(e^{2t}\ Cos\ t) + C$$

$$\int e^{2t}\ Sen\ t\ dt = \left(\frac{1}{5}\right)\ e^{2t}\,[2\ Sen\ t - Cos\ t] + C$$

6) $\displaystyle\int \boldsymbol{Csc^3 2t\ \ dt}$

$$\int Csc^3 2t\ dt = \int Csc^2 2t\ Csc\ 2t\ \ dt$$

La integral se resuelve integrando por partes, elegimos

$u = Csc\ 2t \qquad du = -2\ Csc\ 2t\ Ctg\ 2t\ dt \quad dv = Csc^2 2t\ dt \quad v = -\frac{1}{2}Ctg\ 2t$

Aplicando la fórmula de integración por partes, queda:

$$\int Csc^3 2t \; dt = -\frac{1}{2} Ctg\ 2t\ Csc\ 2t - \int Ctg^2 2t\ Csc\ 2t\ dt$$
$$\int Csc^3 2t \; dt = -\frac{1}{2} Ctg\ 2t\ Csc\ 2t - \int (Csc^2 2t - 1)\ Csc\ 2t\ dt$$
$$\int Csc^3 2t \; dt = -\frac{1}{2} Ctg\ 2t\ Csc\ 2t - \int Csc^3 2t\ dt + \int Csc\ 2t\ dt$$
$$2\int Csc^3 2t \; dt = -\frac{1}{2} Ctg\ 2t\ Csc\ 2t + \frac{1}{2}\ln|Csc\ 2t - Ctg\ 2t| + C$$
$$\int Csc^3 2t \; dt = -\frac{1}{4} Ctg\ 2t\ Csc\ 2t + \frac{1}{4}\ln|Csc\ 2t - Ctg\ 2t| + C$$

7) $\int \boldsymbol{Sec^5\, x\, dx}$

$$\int Sec^5\, x\, dx = \int Sec^3 x\ sec^2 x\ \ dx$$

La integral se resuelve integrando por partes, elegimos

$u = Sec^3 x \quad du = 3\ Sec^2 x\ Sec\ x\ Tan\ x\ dx \quad dv = Sec^2 x\ dx \quad v = \tan x$

Aplicando la fórmula de integración por partes, queda:

$$\int Sec^5\, x\, dx = Sec^3 x\ Tan\ x - 3\int Tan^2 x\ Sec^3 x\ dx$$
$$\int Sec^5\, x\, dx = Sec^3 x\ Tan\ x - 3\int (Sec^2 x - 1)\ Sec^3 x\ dx$$
$$\int Sec^5\, x\, dx = Sec^3 x\ Tan\ x - 3\int Sec^5 x\ \ dx + 3\int Sec^3 x\ \ dx$$
$$4\int Sec^5\, x\, dx = Sec^3 x\ Tan\ x + 3\int Sec^3 x\ \ dx$$
$$\int Sec^5\, x\, dx = \frac{1}{4} Sec^3 x\ Tan\ x + \frac{3}{4}\int Sec^3 x\ \ dx$$

Se calcula aparte la segunda integral

$$\int Sec^3\, x\, dx = \int Sec^2 x\ Sec\ x\ \ dx$$

Resolviendo por partes

$u = \mathrm{Sec}\, x \qquad du = Sec\ x\ Tan\ x\ dx$

$dv = Sec^2 x\ dx \qquad v = Tan\ x$

$$\int Sec^3\, x\, dx = Tan\ x\ Sec\ x - \int Tan^2 x\ \ Sec\ x\ dx$$
$$\int Sec^3\, x\, dx = Tan\ x\ Sec\ x - \int (Sec^2 x - 1)\ \ Sec\ x\ dx$$
$$\int Sec^3\, x\, dx = Tan\ x\ Sec\ x - \int Sec^3 x\ dx + \int Sec\ x\ dx$$

$$2\int Sec^3\, x\, dx = Tan\, x\, Sec\, x + \int Sec\, x\, dx$$
$$2\int Sec^3\, x\, dx = Tan\, x\, Sec\, x + \ln|Sec\, x + Tan\, x| + C$$
$$\int Sec^3\, x\, dx = \frac{1}{2} Tan\, x\, Sec\, x + \frac{1}{2}\ln|Sec\, x + Tan\, x| + C$$

Se sustituye el valor de la segunda integral y se obtiene el resultado

$$\int Sec^5\, x\, dx = \frac{1}{4} Sec^3 x\, Tan\, x + \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2} Tan\, x\, Sec\, x + \frac{1}{2}\ln|Sec\, x + Tan\, x|\right] + C$$
$$\int Sec^5\, x\, dx = \frac{1}{4} Sec^3 x\, Tan\, x + \frac{3}{8} Tan\, x\, Sec\, x + \frac{3}{8}\ln|Sec\, x + Tan\, x| + C$$

8) Resolver la ecuación diferencial dada, haciendo y' = *dy/dx*

$$\boldsymbol{y' = x\, e^{3x}}$$

Solución:

Sustituyendo *y'* y despejando *dy*, resulta:

$$dy = xe^{3x}\, dx$$

Se Integran ambos lados de la ecuación, para eliminar los diferenciales

$$\int dy = \int xe^{3x}\, dx$$

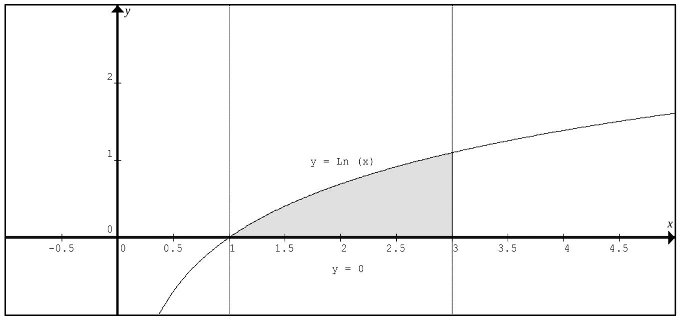
El lado derecho de la ecuación se integra por partes, haciendo *u = x; du = dx;* $dv = \int e^{3x} dx;\, v = \frac{1}{3} e^{3x}$

$$y = \frac{1}{3} xe^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} dx$$

$$y = \frac{1}{3} xe^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C$$

9) Si el área de la región mostrada en la figura está dada por:

$\boldsymbol{A = \int_1^3 Ln\, x\, dx}$**. Calcular dicha área**



Solución:

Se resuelve por partes la integral dada $haciendo\ u = Ln\ x; du = \frac{dx}{x}; dv = dx\ y\ v = x$

$$A = Ln\ x\ (x)|_1^3 - \int_1^3 x\left(\frac{dx}{x}\right) = [x\ Ln\ x - \ x]_1^3 = (3\ Ln\ 3 - 3) - (ln1 - 1)$$

$$\boldsymbol{A = 3\ Ln\ 3 - 2\ \cong 1.29\ u^2}$$

Actividad No. 11	**¿Qué partes aplicadas?**	**Individual – extra aula**
Propósito: Análisis de las características del método de integración por partes, como introducción al tema.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga los procedimientos y la solución correcta a cada ejercicio propuesto		
Tiempo estimado para la actividad: 1 hora		

Descripción de la actividad:
Selecciona correctamente "u" y "dv" para las funciones polinomiales, exponenciales, trigonométricas, inversa y logarítmica. Argumente la selección de "u" y "dv" en cada situación.

$\boldsymbol{\int x\ Cos\ xdx}$	$\boldsymbol{\int xe^x dx}$	$\boldsymbol{\int e^x Cosx\ dx}$	$\boldsymbol{\int ln\ x\ dx}$
$\boldsymbol{\int x^2 Cos\ x\ dx}$	$\boldsymbol{\int x2^x\ dx}$	$\boldsymbol{\int e^x Sen\ 2x\ dx}$	$\boldsymbol{\int x\ lnx\ dx}$
$\boldsymbol{\int x\ Sec^2 x\ dx}$	$\boldsymbol{\int x^2 5^x dx}$	$\boldsymbol{\int xCosh^{-1} x\ dx}$	$\boldsymbol{\int x^2 lnx\ dx}$
$\boldsymbol{\int x^3 Cosx^2 dx}$	$\boldsymbol{\int x^3 e^{x^2} dx}$	$\boldsymbol{\int x^2 Tan^{-1}\ xdx}$	$\boldsymbol{\int x^3 lnx\ dx}$

Ejercicio 2.1

Resuelva las siguientes integrales

1) $\int x\ Sec^2\ 2x\ dx$ 2) $\int t\ e^{2t+1}\ dt$

3) $\int x^2 \ln x^2\, dx$

4) $\int (2t+1) \ln t\ \, dt$

5) $\int arcCos\, 5x\, dx$

6) $\int 5\, Tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\, dx$

7) $\int t^2\ \, Cos\, 3t\, dt$

8) $\int x^3\, Sen\, x\, dx$

9) $\int Cos\ \, 2x\ \, e^x\, dx$

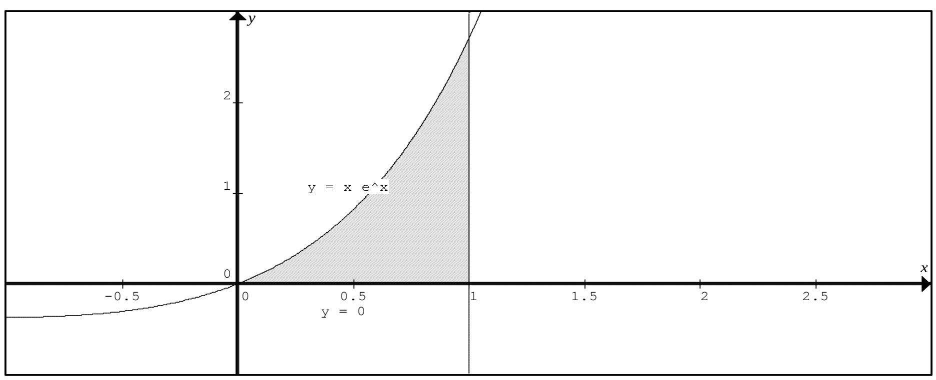
10) $\int e^{-\theta}\, Cos\, \theta\, d\theta$

11) Resolver la ecuación diferencial dada, haciendo y' = *dy/dx*

$$y' = x\, Cos\, x$$

12) Si el área de la región mostrada en la figura está dada por:

$A = \int_1^3 xe^x dx$. Calcular dicha área



Solución al ejercicio 2.1

1) $\frac{x}{2}\tan 2x - \frac{1}{4}\ln|\sec 2x| + C$

2) $e^{2t+1}\left(\frac{2t-1}{4}\right) + C$

3) $\frac{x^3}{3}\ln x^2 - \frac{2}{9}x^3 + C$

4) $t^2\left(\ln t - \frac{1}{2}\right) + t(\ln t - 1) + C$

5) $x\, arcCos\, 5x - \frac{1}{5}\,(1-25x^2)^{\frac{1}{2}} + C$

6) $5x\, tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - 5\ln|4+x^2| + C$

7) $\frac{t^2}{3}\ Sen3\, t + \frac{2}{9}\ t\, Cos\, 3t - \frac{2}{27}Sen3t + C$

8) $(6x - x^3)\, Cos\, x + \ (3x^2-6)\, Sen\, x + C$

9) $\frac{1}{5}\ e^x(2Sen\, 2x + \ Cos\, 2x) + C$

10) $\frac{1}{2}e^{-\theta}(Sen\, \theta - Cos\, \theta) + C$

11) $x\, Senx + Cos\, x + C$

12) $40.17u^2$

2.2 Método de integración de potencias de funciones trigonométricas.

Actividad No. 12	¿Cuál es tu estrategia?	Individual – en el aula
Propósito: Analizar las condiciones para aplicar cada uno de los casos trigonométricos, como introducción al tema.		
Criterio de evaluación: Reporte que muestre la redacción correcta y concreta de la estrategia requerida.		
Tiempo estimado para la actividad: 1 hora clase		

Descripción de la actividad.

1) Explica cuál es tu estrategia para evaluar integrales que contienen senos o cosenos:
a) Con la potencia de la función seno impar positiva
b) Con la potencia de la función coseno impar positiva
c) Si las potencias de ambos son pares y positivas

2) Describir cómo integrar $\int Sen^m x Cos^n x \, dx$ para cada condición.
a) m es positivo e impar.
b) n es positivo e impar.
c) m y n son positivos e impares.

3) Describir cómo integrar $\int Sec^m \, x \, Tan^n \, x \, dx$ para cada condición.
a) m es positivo y par.
b) n es positivo e impar.
c) n es positivo y par y no hay factor secante.
d) m es positivo e impar y no hay factor tangente.

2.2 Integración de potencias de funciones trigonométricas

En algunas integrales aparecen funciones trigonométricas o potencias de funciones trigonométricas, para calcular dichas integrales se verá en esta sección diferentes maneras de hacerlo, aplicando conocimientos de algebra, trigonometría y los conocimientos previos de cálculo integral.

Se presentan ocho casos diferentes, dependiendo de si las funciones del integrando son senos y cosenos, tangentes y secantes, cotangentes y cosecantes; dependiendo también de si la potencia es par o impar. Después de esto se verán algunas integrales que no corresponden a ninguno de los ocho casos y como se pueden resolver.

Para aplicar alguno de estos ocho casos se reescribe la integral como un producto de funciones, en algunas de las cuales se aplicará una identidad trigonométrica (dependiendo del caso); lo cual permitirá reescribir la integral como una suma o resta de integrales más sencillas que la integral original. Lo antes mencionado se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo

1) $\int \boldsymbol{Sen^5\ x\ dx}$

Reescribiendo $\int Sen^5 x$ dx como $\int (sen^2 x)^2 Sen\, x\, dx$, despejando $Sen^2 x = 1 - Cos^2 x$ de la identidad $Sen^2 u + Cos^2 u = 1$ y sustituyendo en la integral, queda:

$$\int Sen^5\ x\, dx = \int (sen^2 x)^2 Sen\, x\, dx = \int (1 - Cos^2 x)^2\, Sen\, x\, dx$$

Note que únicamente quedó un término $Sen\, x$, este término forma parte del du, por lo tanto conviene que $u = Cos\, x$. Haciendo cambio de variable, queda:

$$u = Cos\, x, \qquad du = -Sen\, x\, dx, \qquad dx = \frac{du}{-Sen\, x}$$

Sustituyendo $u\ y\ du$ en la integral y simplificando queda,

$$\int Sen^5\ x\, dx = \int (1 - u^2)^2\, Sen\, x\, \frac{du}{-Sen\, x}$$

$$\int Sen^5\ x\, dx = -\int (1 - 2u^2 + u^4)\, du = -u + 2\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C$$

Regresando a u su valor original queda,

$$\int Sen^5\ x\, dx = -Cos\, x + \frac{2}{3} Cos\,^3 x - \frac{1}{5} Cos\,^5 x + C$$

TABLA DE CASOS

La Tabla 2.1 puede servir de apoyo para analizar la integral propuesta. En la primer columna aparecen los diferentes casos que pueden presentarse, en la segunda columna la condición que debe cumplirse, en la tercer columna la identidad útil para usar, en la cuarta columna la estrategia a seguir para reescribir la integral en integrales más sencillas y en la quinta columna un ejemplo incompleto, solo se llega hasta la aplicación de la identidad.

Para resolver una integral usando como apoyo la tabla, debe observarse la(s) funciones del integrando, así como el tipo de exponentes que tiene, posteriormente debe identificarse en la tabla el caso que se presenta en dicha integral y así, emplear la identidad y la estrategia correctas.

Ver tabla en página siguiente.

Tipo de integral	Condición	Identidad útil	Estrategia	Ejemplo con aplicación de la identidad
$\int Sen^n u\, du, \int Cos^n u\, du,$	donde n es un entero impar positivo	$Sen^2 u + Cos^2 u = 1$	$\int Sen^n u\, du = \int Sen^{n-1} u\ Sen\, u\, du$ $\int Cos^n u\, du = \int Cos^{n-1} u\ Cos\, u\, du$	$\int Sen^3 x\, dx = \int Sen^2 x\, Sen\, x\, dx = \int (1 - Cos^2 x) Sen\, x\, dx$
$\int Sen^n u\, Cos^m u\ du,$	donde n o m es un entero impar positivo	$Sen^2 u + Cos^2 u = 1$	$\int Sen^n u\, Cos^m u\ du$ $= \int Sen^n u\, Cos^{m-2} u\, Cos^2 u\ du$ para m impar	$\int Sen^2 x\, Cos^3\, x\ dx = \int Sen^2 x\, Cos^2\, x\, Cos\, x\ dx$ $= \int Sen^2 x\, (1 - Sen^2\, x)\, Cos\, x\ dx$
$\int Sen^n u\, du,$ $\int Cos^n u\, du,$ $\int Sen^n u\, Cos^m u\ du,$	donde n y m son enteros pares positivos	$Sen^2 u = \frac{1 - Cos\, 2u}{2}$ $\quad Cos^2 u = \frac{1 + Cos\, 2u}{2}$ $Sen\, u\, Cos\, u = \frac{1}{2} Sen\, 2u$	Utilizar la identidad adecuada	$\int Cos^4 x\, dx = \int Cos^2 x\, Cos^2 x dx = \int \left(\frac{1 + Cos\, 2x}{2}\right)^2 dx$
$\int Sen\, (mu)\, Cos(nu) du$ $\int Sen\, (mu)\, Sen(nu) du$ $\int Cos\, (mu)\, Cos(nu) du$	donde n y m son cualquier número	$Sen\, A\, Cos\, B = \frac{1}{2}[Sen\, (A - B) + Sen\, (A + B)]$ $Sen\, A\, Sen\, B = \frac{1}{2}[\, Cos\, (A - B) - Cos\, (A + B)]$ $Cos\, A\, Cos\, B = \frac{1}{2}[\, Cos\, (A - B) + Cos\, (A + B)]$	Utilizar la identidad adecuada	$\int Sen\, (2x)\, Sen\, (-5x)\, dx = \int \frac{1}{2}[\, Cos\, (7x) - Cos\, (-3x)]\, dx$
$\int Tan^n u\, du,$ $\int Cot^n u\, du$	donde n es cualquier número entero	$1 + Tan^2 u = Sec^2 u$	$\int Tan^n u\ du = \int Tan^{n-2} u\, Tan^2 u\, du$ $\int Cot^n u = \int Cot^{n-2} u\, Cot^2 u\ du$	$\int Tan^3 x\, dx = \int Tan\, x\ \ Tan^2 x\ \ dx = \int Tan\, x\ \ (Sec^2 x - 1)\, dx$
$\int Sec^n u\, du,$ $\int Csc^n u\, du$	donde n es un entero par positivo	$1 + Tan^2 u = Sec^2 u$ $1 + Cot^2 u = Csc^2 u$	$\int Sec^n u\ du = \int Sec^{n-2} u\, Sec^2 u\, du$ $\int Csc^n u\ du = \int Csc^{n-2} u\, Csc^2 u\, du$ **Si n es impar se utiliza integración por partes**	$\int Csc^4 x\ dx = \int Csc^2 x\ \ Csc^2 x\, dx = \int (1 + Cot^2 x)\, Csc^2 x\, dx$ $\boldsymbol{\int Sec^3 x\, dx = \int Sec^2 x\, Sec\, x\, dx = \int (1 + Tan^2 u)\, Sec\, x\, dx}$
$\int Tan^m u\ \ Sec^n u\, du$ $\int Cot^m u\ \ Csc^n u\, du$	donde n es un entero par positivo	$1 + Tan^2 u = Sec^2 u$ $1 + Cot^2 u = Csc^2 u$	$\int Tan^m u\ \ Sec^n u\, du$ $= \int Tan^m u\, Sec^{n-2} u\, Sec^2 u\, du$ $\int Cot^m u\ \ Csc^n u\, du$ $= \int Cot^m u\, Csc^{n-2} u\, Csc^2 u\, du$	$\int Tan^2 x\ \ Sec^4 x\, dx = \int Tan^2 x\ \ Sec^2 x\ \ Sec^2 x\, dx$ $= \int Tan^2 x\ \ (1 + Tan^2 x)\, Sec^2 x\, dx$
$\int Tan^m u\ \ Sec^n u\, du$ $\int Cot^m u\ \ Csc^n u\, du$	donde m es un entero impar positivo	$1 + Tan^2 u = Sec^2 u$ $1 + Cot^2 u = Csc^2 u$	$\int Tan^m u\ \ Sec^n u\, du$ $= \int Tan^{m-1} u\, Tan\, u\, Sec^{n-1} u\, Sec\, u\, du$ $\int Cot^m u\ \ Csc^n u\, du$ $= \int Cot^{m-1} u\, Cot\, u\, Csc^{n-1} u\, Csc\, u\, du$ **Si m es par y n es impar, se integra por partes**	$\int Cot^3 x\ \ Csc^3 x\, dx = \int Cot^2 x\ \ Cot\ \ Csc^2 x\ \ Csc\, x\, dx$ $= \int (Csc^2 x - 1) Csc^2 x\ \ Csc\, x\, Cot\, x\, dx$ $\boldsymbol{\int Tan^2 x\, Sec\, x\, dx = \int Tan\, x\ \ Sec\, x\ \ Tan\, x\, dx}$ $\boldsymbol{u = Tanx\ \ , dv = Sec\, x\, Tanx\, dx}$

Ejemplos:

$$\mathbf{2)} \int \boldsymbol{Sen^3\, x\, Cos\, x\, dx}$$

Nota: Antes de intentar resolver la integral por el método de potencias, es importante observar si la integral propuesta puede resolverse con un simple cambio de variable, como en este ejemplo.

La derivada del Seno es el Coseno, por lo que en este ejemplo tenemos una integral del tipo $\int u^n\, du$ y no se requiere aplicar el método de potencias.

Haciendo cambio de variable, queda:

$$u = Sen\, x, \qquad du = Cos\, x\, dx, \qquad dx = \frac{du}{Cos\, x}$$

Sustituyendo $u\ y\ du$ en la integral y simplificando queda,

$$\int Sen^3\, x\, Cos\, x\, dx = \int u^3\, Cos\, x\, \frac{du}{Cos\, x} = \int u^3\, du = \frac{u^4}{4} + C$$

$$\int Sen^3\, x\, Cos\, x\, dx = \frac{Sen^5 x}{5} + C$$

$$\mathbf{3)} \int \boldsymbol{Cos^4\ 3x\, dx}$$

Identificar en la tabla el caso del integrando, es un coseno elevado a una potencia par. (Caso 3)

Estrategia: Reescribir $\int Cos^4 3x$ dx como $\int Cos^2 3x\, Cos^2 3x\, dx$, la identidad útil para este caso es $Cos^2 u = \frac{1+Cos2u}{2}$. Sustituyendo $\left(Cos^2 3x = \frac{1+Cos6x}{2}\right)$ en los factores $(Cos^2 3x)$, queda:

$$\int Cos^4\ 3x\, dx = \int Cos^2 3x\, Cos^2 3x\, dx = \int \left(\frac{1+Cos6x}{2}\right)\left(\frac{1+Cos6x}{2}\right) dx$$

$$\int Cos^4\ 3x\, dx = \int \left(\frac{1+Cos6x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 + 2Cox\ 6x + Cos^2\ 6x)\, dx$$

Reescribiendo como una suma de integrales, completando diferenciales e integrando, queda:

$$\int Cos^4\ 3x\, dx = \frac{1}{4}\int (1)\, dx + \frac{1}{4}\int 2Cox\ 6x\, dx + \frac{1}{4}\int Cos^2\ 6x\ dx$$

$\int Cos^4\ 3x\, dx = \frac{1}{4}x + \left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{1}{6}\right) Sen\ 6x + \frac{1}{4}\int Cos^2\ 6x\ dx,$ aplicar de nuevo la identidad

$$\int Cos^4\ 3x\,dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{12}Sen\ 6x + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1 + Cos\ 12x}{2}\right)\,dx$$

$$\int Cos^4\ 3x\,dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{12}Sen\ 6x + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int Cos\ 12x\ dx$$

$\int Cos^4\ 3x\,dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{12}Sen\ 6x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{96}Sen\ 12x + C,$ sumar términos semejantes

$$\int Cos^4\ 3x\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{12}Sen\ 6x + \frac{1}{96}Sen\ 12x + C$$

4) $\int \boldsymbol{Sen^3 5x\ Cos^2 5x\ dx}$

Identificar en la tabla el caso del integrando, es un producto de senos y cosenos, con uno de ellos con potencia impar. (Caso 2)

Estrategia: Reescribiendo la integral $\int Sen^3 5x\ Cos^2 5x\ dx$ como $\int Sen^2 5x\ Sen\ 5x\ Cos^2 5x\ dx$, despejando $Sen^2 5x = 1 - Cos^2 5x$ de la identidad $Sen^2 u + Cos^2 u = 1$ y sustituyendo $(1 - Cos^2 5x)$ en el factor $(Sen^2 5x)$:

$$\int Sen^3 5x\ Cos^2 5x\ dx = \int Sen^2 5x\ Sen\ 5x\ Cos^2 5x\ dx$$
$$\int Sen^3 5x\ Cos^2 5x\ dx = \int (1 - Cos^2 5x)\ \ Cos^2 5x\ Sen\ 5x\ dx$$

Note que únicamente quedó un término $Sen\ 5x$, este término forma parte del du, por lo tanto conviene que $u = Cos\ 5x$. Haciendo cambio de variable, queda:

$$u = Cos\ 5x, \qquad du = -5\ Sen\ 5x\ dx, \qquad dx = \frac{du}{-5\ Sen\ 5x}$$

Sustituyendo $u\ y\ du$ en la integral y simplificando queda,

$$\int Sen^3 5x\ Cos^2 5x\ dx = \int (1 - u^2)\ \ u^2\ Sen\ 5x\ \frac{du}{-5\ Sen\ 5x} = -\frac{1}{5}\int (1 - u^2)\ \ u^2\ du$$

$\int Sen^3 5x\ Cos^2 5x\ dx = -\frac{1}{5}\int u^2 du + \frac{1}{5}\int u^4 du = -\frac{1}{5}\frac{u^3}{3} + \ \frac{1}{5}\frac{u^5}{5}$+C

Regresando a u su valor original queda,

$$\int Sen^3 5x\ Cos^2 5x\ dx = -\frac{1}{15}Cos^3 5x + \frac{1}{25}Cos^5 5x + C$$

5) $\int \boldsymbol{Cos\ (3\theta)\ Cos(-5\theta)\ \ dt}$

Identificar en la tabla el caso del integrando, es un producto dos funciones coseno. (Caso 4)

Estrategia: Aplicar correctamente la identidad $Cos\,A\,Cos\,B = \frac{1}{2}[\,Cos\,(A-B) + Cos\,(A+B)]$

$\int Cos\,(3\theta)\,Cos(-5\theta)\;d\theta = \int \frac{1}{2}[\,Cos\,(3\theta+5\theta) + Cos\,(3\theta-5\theta)]\,d\theta$
$$\int Cos\,(3\theta)\,Cos(-5\theta)\;d\theta = \int \frac{1}{2}[\,Cos\,(8\theta) + Cos\,(-2\theta)]\,d\theta$$
$\int Cos\,(3\theta)\,Cos(-5\theta)\;d\theta = \int \frac{1}{2}[\,Cos\,(8\theta)]\,d\theta + \int \frac{1}{2}[\,Cos\,(-2\theta)]\,d\theta$
$\int Cos\,(3\theta)\,Cos(-5\theta)\;d\theta = \frac{1}{16}Sen\,(8\theta) - \frac{1}{4}Sen\,(-2\theta) + C$

6) $\int \boldsymbol{Csc^4 2x\;dx}$

Identificar en la tabla el caso del integrando, es una cosecante elevada a una potencia par.(Caso 6)

Reescribiendo la integral$\int Csc^4 2x\;dx$ como $\int Csc^2 2x\,Csc^2 2x\;dx$, utilizando la identidad $Csc^2 2x = Ctg^2 2x + 1$ y sustituyendo $(Ctg^2 2x + 1)$ en uno de los téminos $(Csc^2 2x)$, queda

$$\int Csc^4 2x\;dx = \int Csc^2 2x\,Csc^2 2x\;dx = \int (Ctg^2 2x + 1)\;Csc^2 2x\,dx$$

Note que el término $Csc^2 2x$ forma parte del du, por lo tanto conviene que $u = Ctg\,2x$. Haciendo cambio de variable, queda:

$$u = Ctg\,2x, \qquad du = -2\,Csc^2 2x\,dx, \qquad dx = \frac{du}{-2\,Csc^2 2x}$$

Sustituyendo $u\;y\;du$ en la integral y simplificando queda,

$$\int Csc^4 2x\;dx = \int (u^2+1)\;Csc^2 2x\,\frac{du}{-2\,Csc^2 2x} = -\frac{1}{2}\int (u^2+1)du$$

$$\int Csc^4 2x\;dx = -\frac{1}{2}\int u^2\,du - \frac{1}{2}\int du = -\frac{1}{2}\frac{u^3}{3} - \frac{1}{2}\;u + C$$

$$\int Csc^4 2x\;dx = -\frac{1}{6}Ctg^3 2x - \frac{1}{2}Ctg\,2x + C$$

7) $\int \boldsymbol{Ctg^3\theta\,Csc^3\theta\;d\theta}$

Identificar en la tabla el caso del integrando, es un producto de cotangentes y cosecantes, ambos con potencia impar. (Caso 8)

Reescribiendo la integral $\int Ctg^3\theta\,Csc^3\theta\;d\theta$ como $\int Ctg^2\theta\,Csc^2\theta\,Ctg\,\theta\,Csc\,\theta\,d\theta$, utilizando la identidad $Csc^2 u - 1 = Ctg^2 u$ y sustituyendo $(Csc^2\theta - 1)$ en el témino $(Ctg^2\theta)$, queda:

$$\int Ctg^3\theta\ Csc^3\theta\ \ d\theta = \int Ctg^2\theta\ Csc^2\theta\ Ctg\ \theta\ Csc\ \theta\ d\theta$$

$$\int Ctg^3\theta\ Csc^3\theta\ \ d\theta = \int (Csc^2\theta - 1)\ Csc^2\theta\ Ctg\ \theta\ Csc\ \theta\ d\theta$$

Conviene hacer la sustitución $u = Csc\ \theta$ y que el producto $Ctg\ \theta\ Csc\ \theta$ sea parte del du . Haciendo cambio de variable, queda:

$$u = Csc\ \theta, \qquad du = -Ctg\ \theta\ Csc\ \theta\ d\theta, \qquad d\theta = \frac{du}{-\ Ctg\ \theta\ Csc\ \theta}$$

Sustituyendo $u\ y\ du$ en la integral y simplificando queda,

$$\int Ctg^3\theta\ Csc^3\theta\ \ d\theta = \int (u^2 - 1)\ u^2\ Ctg\ \theta\ Csc\ \theta\ \frac{du}{-\ Ctg\ \theta\ Csc\ \theta}$$

$$\int Ctg^3\theta\ Csc^3\theta\ \ d\theta = -\int (u^2 - 1)u^2\ du = -\int (u^4 - u^2)du = -\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + C$$

$$\int Ctg^3\theta\ Csc^3\theta\ \ d\theta = -\ \frac{Csc^5\theta}{5} + \frac{Csc^3\theta}{3} + C$$

8) $\int \frac{sen^3x}{tan^2x} dx$

Como esta integral no está en ningún caso, entonces conviene expresarla en función de senos y cosenos a través del uso de identidades.

$$\int \frac{sen^3x}{tan^2x} dx = \int \frac{sen^3x}{\frac{sen^2x}{cos^2x}} dx = \int \frac{sen^3xcos^2x}{sen^2x} dx = \int senxcos^2xdx$$

Se hace la sustitución: $u = cosx,\ \ du = -senxdx$

$$\int \frac{sen^3x}{tan^2x} dx = \int -u^2du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{1}{3}cos^3x + C$$

9) $\int tan^3x\ cot^2x\ dx$

Esta integral tampoco está en ningún caso, pero se sabe que $tanx\ cotx = 1$

$$\int tan^3x\ cot^2x\ dx = \int tan^2x\ cot^2x\ tanx\ dx = \int (tanx\ cotx)^2\ tanx\ dx$$

$$\int tan^3x\ cot^2x\ dx = \int 1\ tanx\ dx = ln(secx) + C$$

10) Resolver la ecuación diferencial dada haciendo y' = dy/dx

$$\boldsymbol{y' = Tan^4 x}$$

Solución:

Sustituyendo y' por dy/dx y despejando dy, resulta:

$dy = Tan^4\ x\ dx$

Se integran ambos lados de la ecuación, el lado derecho se resuelve por Caso V de potencias de funciones trigonométricas.

$dy = (Sec^2 x - 1)Tan^2 x\ dx$
$dy = (Sec^2 x\ Tan^2 x - Tan^2 x)\ dx$
$dy = [Sec^2 x Tan^2 x - (Sec^2 x - 1)]dx$
$dy = (Sec^2 x Tan^2 x - Sec^2 x + 1)dx$
$y = \frac{1}{3}Tan^3 x - Tan\ x + x + C$ Multiplicando por (3)
$3y = Tan^3 x - 3\ Tan\ x + 3x + C$

11) El volumen del sólido que se genera al girar con respecto al eje X, la región limitada por las gráficas de $\boldsymbol{y = Cos\ x; y = 0; x = 0}$ está dado por: $\boldsymbol{V = \pi \int_0^{\pi/2} Cos^2 x\ dx}$. Calcular dicho volumen.

Ejercicio 2.2

Resuelve las siguientes integrales:

1) $\int Cos^3 4x\ dx$
2) $\int Sen^4\left(\frac{t}{2}\right) dt$
3) $\int Sen^4 2x\ Cos^3 2x\ dx$
4) $\int Cos^4\theta\ Sen^2\theta\ d\theta$
5) $\int Cos(2t)Sen(3t)dt$
6) $\int Sen(7t)Sen(-2t)dt$
7) $\int Cot^5 5x\ dx$
8) $\int Sec^3 9x\ dx$
9) $\int Tan^3 2\theta\ Sec^4 2\theta\ d\theta$
10) $\int Tan^5 2t\ Sec^3 2t\ dt$
11) $\int Csc^5 2t\ dt$
12) $\int Cot^4 2t\ Csc^3 2t\ dt$

Solución al ejercicio 2.2

1. $\frac{1}{4}\, Sen\, 4x - \frac{1}{12}\, Sen^3 4x + C$

2. $\frac{3}{8}t - \frac{1}{2}Sen\ t + \frac{1}{16}\ Sen\ 2t + C$

3. $\frac{1}{10}\ Sen^5 2x - \frac{1}{14}\ Sen^7 2x + C$

4. $\frac{1}{16}\ \theta - \frac{1}{64}\ Sen\ 4\theta + \frac{1}{48}\ Sen^3 2\theta + C$

5. $-\frac{1}{2}\ Cos\ t - \frac{1}{10}\ Cos\ 5t + C$

6. $\frac{1}{18}\ Sen\ 9t - \frac{1}{10}\ Sen\ 5t + C$

7. $\frac{1}{10}Ctg^2 5x - \frac{1}{20}Ctg^4 5x + \frac{1}{5}\ln|Sen\ 5x| + C$

8. $\frac{1}{18}\ Sec\ 9x\ Tan\ 9x + \frac{1}{18}\ln|Sec\ 9x + Tan\ 9x| + C$

9. $\frac{1}{8}\ Tan^4 2\theta + \frac{1}{12}\ Tan^6 2\theta + C$

10. $\frac{1}{14}\ Sec^7 2t - \frac{1}{5}\ Sec^5 2t + \frac{1}{6}\ Sec^3 2t + C$

11. $-\frac{1}{5}Csc^3 2t\ Ctg\ 2t - \frac{3}{20}Ctg\ 2t\ Csc\ 2t + \frac{3}{20}\ln|Csc\ 2t - Ctg\ 2t| + C$

12. $-\frac{1}{12}Csc^5 2tCot2t + \frac{7}{48}Csc^3 2tCot2t - \frac{1}{32}Csc2tCot2t$
$+\frac{1}{32}ln|Csc2t - Cot2t| + C$

Actividad No. 13	**¿Qué caso tiene?**	**Individual – extra aula**
Propósito: Analizar las fórmulas de los casos trigonométricos para determinar las condiciones de aplicación		
Criterio de evaluación: Llenado correcto de la tabla		
Tiempo estimado para la actividad: 30 minutos		

Descripción de la actividad:

1) Llena la tabla propuesta, indica el caso que resolverá a cada integral propuesta y justifica. (Ver ejemplo)

Integral	Caso trigonométrico	Justificación

$\int Sen^3(2x)dx$	**Caso I**	**Porque el integrando contiene la función seno elevado a un exponente impar positivo.**
$\int Sen(3x)Cos(2x)dx$		
$\int Tan^4\,(x)\,dx$		
$\int Csc^6\,(2x)\,dx$		
$\int Cos^4\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$		
$\int \sqrt{Tanx}\,Sec^4x\,dx$		
$\int Cot^3xCsc^3x\,dx$		
$\int Cos^3\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$		
$\int tan^3xSec^4x\,dx$		
$\int Sec^5(4x)dx$		
$\int Sen^3 7xCos^3 7x\,dx$		

2.3 Sustitución trigonométrica.

Conocimiento previo: Definición de las funciones trigonométricas y Teorema de Pitágoras.

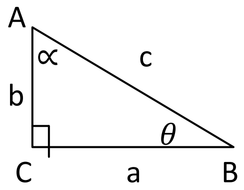
Actividad No. 14	**Pitagorízate**	**Individual – extra aula**
Propósito: Recordar el teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas en triángulos rectángulos.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga la descripción correcta a cada enunciado.		
Tiempo estimado para la actividad: 20 minutos		

Descripción de la actividad:

Para el siguiente triángulo rectángulo, determina:

a) La longitud de cada uno de sus lados.

b) Las funciones trigonométricas para cada uno de sus ángulos agudos



Método de Sustitución trigonométrica

Este método se aplica cuando el integrando contiene una de las expresiones de la forma: $\sqrt{a^2-u^2}$; $\sqrt{a^2+u^2}$; $\sqrt{u^2-a^2}$, en donde "*a*" es una constante, *a* > 0, y "*u*" es una función derivable de x.

Este método involucra hacer sustituciones trigonométricas, según sea, la expresión que contenga el integrando, como se ilustra en la siguiente tabla:

Expresión en el integrando	Sustitución trigonométrica	La raíz se sustituye por:
$\sqrt{a^2-u^2}$	$u = a\,Sen\,\theta$	$a\,Cos\,\theta$
$\sqrt{a^2+u^2}$	$u = a\,Tan\,\theta$	$a\,Sec\,\theta$
$\sqrt{u^2-a^2}$	$u = a\,Sec\,\theta$	$a\,Tan\,\theta$

Procedimiento:

Paso 1: Identificar la sustitución trigonométrica que se debe aplicar con sus valores correspondientes.

Paso 2: Calcular el diferencial de "u" para obtener "dx".

Paso3: Sustituir la variable y el diferencial en el integrando, considerando la sustitución de la raíz por la expresión correspondiente en la tabla y simplificar.

Paso 4: Resolver la integral resultante.

Paso 5: Expresar el resultado del paso 4 en base a la variable que está definida la integral, si es necesario, trazar un triángulo rectángulo en donde sus elementos dependen de la función trigonométrica despejada de la sustitución (Paso 1) y calcular el lado faltante (raíz que generó la sustitución trigonométrica)

Paso 6: Determinar en base al triángulo las funciones involucradas en el resultado del paso 4 y sustituirlas en dicho resultado.

Ejemplo: Resuelva cada una de las siguientes integrales:

1) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

Paso 1: La sustitución que corresponde a $\sqrt{4-x^2}$ es $u = a\,Sen\theta, con\; u = x\; y\; a = 2$ resulta $x = 2\,Sen\,\theta$.

Paso 2: Se calcula el diferencial de “x”; $dx = 2\ Cos\ \theta\ d\theta$

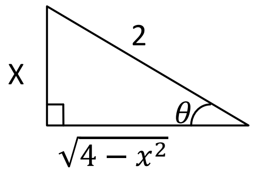
3er. Paso: Sustituyendo “x”, “dx” y $\sqrt{4-x^2} = 2Cos\theta$ y simplificando, resulta:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2\ Cos\ \theta\ d\theta}{(2Sen\ \theta)^2(2Cos\theta)} = \int \frac{d\theta}{4Sen^2\theta}$$

Paso 4: Al resolver la integral resultante, queda:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{Sen^2\theta}d\theta = \frac{1}{4}\int Csc^2\theta\ d\theta = \frac{1}{4}(-Cot\theta) + C = \boldsymbol{\frac{-1}{4}Cot\ \theta + C}$$

Paso 5: Despejando de la sustitución trigonométrica $Sen\ \theta = \frac{x}{2}$, y sabiendo que $Sen\ \theta = \frac{Cateto\ opuesto}{hipotenusa}$, se traza el triángulo rectángulo en donde el cateto opuesto es *“x”*, la hipotenusa es 2 y el cateto adyacente es $\sqrt{4-x^2}$



Paso 6: Calculando en base al triángulo $Cot\ \theta = \frac{Cateto\ adyacente}{Cateto\ opuesto} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$ y sustituyendo en el resultado del paso 4 y simplificando:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-1}{4}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right) + C = \frac{-\sqrt{4-x^2}}{4x} + C$$

2) $\boldsymbol{\int \frac{\sqrt{t^2+9}\ dt}{t}}$

La sustitución que corresponde a $\sqrt{t^2+9}$ con sus valores correspondientes es $t = 3\ Tan\ \theta$.

Calculando el diferencial de “t”, resulta que $dt = 3\ Sec^2\ \theta\ d\theta$

Sustituyendo “t”, “dt” y $\sqrt{t^2+\ 9} = 3\ Sec\theta$ y simplificando, resulta:

$$\int \frac{\sqrt{t^2+9}\ dt}{t} = \int \frac{(3Sec\theta)(3Sec^2\theta)d\theta}{3Tan\theta} = \int \frac{3Sec^3\theta d\theta}{Tan\theta}$$

Al resolver la integral resultante, queda:

$\int \frac{\sqrt{t^2+9}\ dt}{t} = 3\int \frac{(Sec\theta)Sec^2\theta d\theta}{Tan\theta} = 3\int \frac{Sec\theta(Tan^2\theta+1)d\theta}{Tan\theta}$ Aplicando identidad en $Sec^2\theta$

Efectuando operaciones algebraicas, resulta:

$$\int \frac{\sqrt{t^2+9}\ dt}{t} = 3\int \frac{(Sec\theta\ Tan^2\theta + Sec\theta)d\theta}{Tan\theta} = 3\int \frac{Sec\theta Tan^2\theta d\theta}{Tan\theta} + 3\int \frac{Sec\theta\ d\theta}{Tan\theta}$$

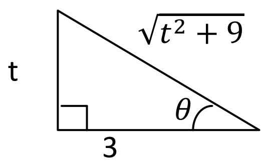
Simplificando la primera integral, sustituyendo $Sec\theta = \frac{1}{COS\theta}$ $y\ Tan\theta = \frac{Sen\theta}{Cos\theta}$ en la segunda integral y simplificándola, resulta:

$$\int \frac{\sqrt{t^2+9}\,dt}{t} = 3\int Sec\theta\, Tan\theta\, d\theta + 3\int \frac{\frac{1}{Cos\theta}}{\frac{Sen\theta}{Cos\theta}} d\theta = 3\int Sec\theta\, Tan\theta d\theta + 3\int \frac{1}{Sen\theta} d\theta$$

Sustituyendo $Csc\theta = \frac{1}{Sen\theta}$ en la segunda integral y resolviendo ambas integrales, resulta:

$$\int \frac{\sqrt{t^2+9}\,dt}{t} = 3\int Sec\theta\, Tan\theta\, d\theta + 3\int Csc\theta\, d\theta = \mathbf{3Sec\theta} + \mathbf{3ln|Csc\theta - Cot\theta|} + \mathbf{C}$$

Despejando de la sustitución trigonométrica $Tan\ \theta = \frac{t}{3}$ y sabiendo que $Tan\ \theta = \frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente}$, se traza el triángulo rectángulo en donde el cateto opuesto es *"t"*, el cateto adyacente es 3 y la hipotenusa es $\sqrt{t^2+9}$



Calculando en base al triángulo $Sec\ \theta = \frac{hipotenusa}{Cateto\ adyacente} = \frac{\sqrt{t^2+9}}{3}$; $Csc\theta = \frac{hipotenusa}{Cateto\ opuesto} = \frac{\sqrt{t^2+9}}{t}$; $Cot\theta = \frac{Cateto\ ayacente}{Cateto\ opuesto} = \frac{3}{t}$ y sustituyendo en el

resultado del paso 4 y simplificando, resulta:

$$\int \frac{\sqrt{t^2+9}\,dt}{t} = 3\left(\frac{\sqrt{t^2+9}}{3}\right) + 3ln\left|\frac{\sqrt{t^2+9}}{t} - \frac{3}{t}\right| + C = \sqrt{t^2+9} + 3ln\left|\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t}\right| + C$$

3) $\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{(x^2-1)^{3/2}}}$

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}$$

La sustitución que corresponde a $\sqrt{x^2-1}$ con sus valores correspondientes es $x = \ Sec\ \theta$.

Calculando el diferencial de "x", resulta que $dx = \ Sec\ \theta\ Tan\theta\ d\theta$

Sustituyendo "x", "dx" y $\sqrt{x^2-1} = Tan\theta$ y simplificando, resulta:

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}} = \int \frac{Sec\theta\ Tan\theta\ d\theta}{(Tan\theta)^3} = \int \frac{Sec\theta\ d\theta}{Tan^2\theta}$$

Para resolver la integral resultante se sustituye

$Sec\theta = \frac{1}{Cos\theta}$; $Tan^2\theta = \frac{Sen^2\theta}{Cos^2\theta}$ y simplificando, queda:

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}} = \int \frac{\frac{1}{Cos\theta}}{\frac{Sen^2\theta}{Cos^2\theta}} d\theta = \int \frac{Cos\theta}{Sen^2\theta} d\theta$$

$$Haciendo\ z = Sen\theta, dz = Cos\theta\ d\theta; despejando\ d\theta = \frac{dz}{Cos\theta}$$

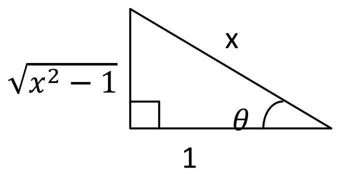
Sustituyendo "z" y "$d\theta$" en la integral resultante y simplificando, queda:

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}} = \int \frac{Cos\theta}{z^2}\left(\frac{dz}{Cos\theta}\right) = \int z^{-2}dz = \frac{z^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{z} + C$$

$Sustituyendo\ z = Sen\theta\ y\ considerando\ que\ Csc\theta = \frac{1}{Sen\theta}$, resulta:

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}} = \frac{-1}{Sen\theta} + C = \boldsymbol{-Csc\theta + C}$$

Despejando de la sustitución trigonométrica $Sec\ \theta = \frac{x}{1}$, y sabiendo que $Sec\ \theta = \frac{hipotenusa}{Cateto\ adyacente}$, se traza el triángulo rectángulo en donde el cateto adyacente es 1, la hipotenusa es "x" y el cateto opuesto es $\sqrt{x^2-1}$



Calculando en base al triángulo $Csc\ \theta = \frac{hipotenusa}{Cateto\ opuesto} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ y sustituyendo en el resultado del paso 4, resulta:

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}} = \frac{-\mathrm{x}}{\sqrt{\mathrm{x}^2-1}} + \mathrm{C}$$

4) $\boldsymbol{\int \sqrt{1-4x^2}dx}$

La sustitución que corresponde a $\sqrt{1-4x^2}$ con sus valores correspondientes es $2x = Sen\ \theta$.

Calculando el diferencial de "x", resulta que $dx = \frac{1}{2}Cos\theta\ d\theta$

Sustituyendo "dx" y $\sqrt{1-4x^2} = Cos\ \theta$ y simplificando, resulta:

$$\int \sqrt{1-4x^2}dx = \int Cos\theta\left(\frac{1}{2}Cos\theta\ d\theta\right) = \int \frac{1}{2}Cos^2\theta\ d\theta$$

Se utiliza la identidad $Cos^2\theta = \frac{1+Cos2\theta}{2}$ y resolviendo, queda:

$$\int \sqrt{1-4x^2}dx = \frac{1}{2}\int Cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1+Cos2\theta}{2}\right) d\theta = \frac{1}{4}\int (1+Cos2\theta)d\theta$$

$$\int \sqrt{1-4x^2}dx = \frac{1}{4}\int d\theta + \frac{1}{4}\int Cos2\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}Sen2\theta\right) + C$$

$$\int \sqrt{1-4x^2}dx = \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{8}Sen2\theta + C$$

Sustituyendo $Sen\ 2\theta = 2\ Sen\theta\ Cos\theta$ en el resultado y simplificando, queda:

$$\int \sqrt{1-4x^2}dx = \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{8}(2\ Sen\theta\ Cos\theta) + C = \boldsymbol{\frac{1}{4}\theta + \frac{1}{4}\ Sen\theta\ Cos\theta + C}$$

Como $Sen\theta = 2x;\ \theta = Sen^{-1}(2x) y\ Cos\theta = \sqrt{1-4x^2}$, resulta:

$$\int \sqrt{1-4x^2}dx = \frac{1}{4}Sen^{-1}(2x) + \frac{1}{4}\ (2x)\sqrt{1-4x^2} + C = \frac{1}{4}Sen^{-1}(2x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-4x^2} + C$$

5) $\boldsymbol{\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}} dx}$

La sustitución que corresponde a $\sqrt{1-x^2}$ con sus valores correspondientes es $x = \ Sen\ \theta$

Como es una integral definida, los límites también se cambian en base a ésta sustitución, es decir:

$Cuando\ x = 0;\ \theta = Sen^{-1}(0) = 0\ y\ Cuando\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \theta = Sen^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

Calculando el diferencial de “x”, resulta que $dx = Cos\theta\ d\theta$

Sustituyendo “x”, “dx”, $\sqrt{1-x^2} = Cos\theta$ y los límites de $0\ a\ \frac{\pi}{3}$ y simplificando, resulta:

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{(Sen\theta)^2 Cos\theta\ d\theta}{(Cos\theta)^3} = \int_0^{\pi/3} \frac{Sen^2\theta}{Cos^2\theta} d\theta$$

Para resolver la integral resultante se aplica la identidad $Tan\theta = \frac{Sen\theta}{Cos\theta}$ y la identidad de $Tan^2\theta = Sec^2\theta - 1$ sustituyendo, queda:

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}} dx = \int_0^{\pi/3} Tan^2\theta\ d\theta = \int_0^{\pi/3} (Sec^2\theta - 1)d\theta = \int_0^{\pi/3} Sec^2\theta\ d\theta - \int_0^{\pi/3} d\theta$$

Resolviendo ambas integrales y sustituyendo los límites de la integral definida, puesto que están definidos para la variable "θ", resulta:

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}} dx = (Tan\theta - \theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \left[Tan\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3}\right] - [Tan\ (0) - 0] = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

La siguiente integral ya se había resuelto en el ejemplo 3 de la sección 1.3.6 y se obtuvo el siguiente resultado: $\int \frac{4dx}{x\sqrt{9-4x^2}} = \frac{-4}{3} Arc\ Sech\left(\frac{2x}{3}\right) + C$

Sin embargo, observe que al resolver la misma integral por el método de sustitución trigonométrica, el resultado que se obtiene es la forma equivalente de las integrales que dan como resultado una función hiperbólica inversa, ambas respuestas son correctas.

6) $\int \frac{4dx}{x\sqrt{9-4x^2}}$

La sustitución que corresponde a $\sqrt{9-4x^2}$ con sus valores correspondientes es $2x = 3\ Sen\ \theta$.

Calculando el diferencial de "x", resulta que $dx = \frac{3}{2}\ Cos\ \theta\ d\theta$

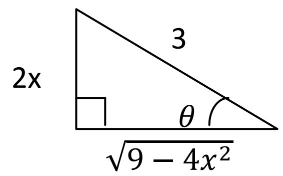
Sustituyendo "x", "dx" y $\sqrt{9-4x^2} = 3Cos\theta$ y simplificando, resulta:

$$\int \frac{4dx}{x\sqrt{9-4x^2}} = \int \frac{4\left(\frac{3}{2}Cos\theta\ d\theta\right)}{\frac{3}{2}Sen\theta(3Cos\theta)} = \int \frac{4\ d\theta}{3Sen\theta}$$

Para resolver la integral resultante se sustituye $Csc\theta = \frac{1}{Sen\theta}$; y simplificando, queda:

$$\int \frac{4dx}{x\sqrt{9-4x^2}} = \frac{4}{3}\int Csc\theta\ d\theta = \boldsymbol{\frac{4}{3} ln|Csc\theta - Cot\theta| + C}$$

Despejando de la sustitución trigonométrica $Sen\ \theta = \frac{2x}{3}$, y sabiendo que $Sen\ \theta = \frac{Cateto\ opuesto}{hipotenusa}$, se traza el triángulo rectángulo en donde el cateto opuesto es "2x", la hipotenusa es 3 y el cateto adyacente es $\sqrt{9-4x^2}$



Calculando en base al triángulo $Csc\ \theta = \frac{hipotenusa}{Cateto\ opuesto} = \frac{3}{2x}$;
$Cot\theta = \frac{Cateto\ adyacente}{Cateto\ opuesto} = \frac{\sqrt{9-4x^2}}{2x}$ y sustituyendo en el resultado del paso 4, resulta:

$$\int \frac{4dx}{x\sqrt{9-4x^2}} = \frac{4}{3} ln\left|\frac{3}{2x} - \frac{\sqrt{9-4x^2}}{2x}\right| + C = \frac{4}{3} ln\left|\frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{2x}\right| + C$$

Ejercicio 2.3

Resuelva cada una de las siguientes integrales:

1) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+4}}$ 2) $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$ 3) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

4) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$ 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$ 6) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}dx}{x^2}$

7) $\int \frac{\sqrt{9-x^2}dx}{x}$ 8) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$ 9) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$

10) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2-9}}$

Solución al ejercicio 2.3

1) $\sqrt{x^2+4}+C$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\frac{-\sqrt{1-x^2}}{x}+C$ 4) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$

5) $ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+C$ 6) $\frac{-\sqrt{4-x^2}}{x}-Sen^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C$

7) $3ln\left|\frac{3-\sqrt{9-x^2}}{x}\right|+\sqrt{9-x^2}+C$ 8) $\frac{1}{2}ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}\right|+C$

9) $8Sen^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)-\frac{1}{2}x\sqrt{16-x^2}+C$ 10) $\frac{1}{3}(x^2+18)\sqrt{x^2-9}++C$

<table>
<tr><td>Actividad No. 15</td><td>¿Qué te parece?</td><td>Individual – en el aula</td></tr>
<tr><td colspan="3">Propósito: Desarrollo de conceptos</td></tr>
<tr><td colspan="3">Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga la descripción correcta a cada enunciado.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Tiempo estimado para la actividad: 30 minutos</td></tr>
</table>

Descripción de la actividad:

1. Decidir qué sustitución trigonométrica habría que hacer suponiendo que la integral a resolver contiene el radical dado, con a > 0. Explicar el razonamiento.

a) $\sqrt{a^2-u^2}$ b) $\sqrt{a^2+u^2}$ c) $\sqrt{u^2-a^2}$

2. Enunciar el método de integración para realizar cada integración. Explicar por qué se eligió ese método. No integrar.

a) $\int x\sqrt{x^2+1}$ dx b) $\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx$

3. Evaluar la integral $\int \frac{x}{x^2+9}\, dx$ usando a) la sustitución trigonométrica y b) cualquier otra sustitución. Discutir los resultados.

4. Evaluar la integral $\int \frac{x^2}{x^2+9}\, dx$ usando a) la sustitución trigonométrica y b) efectuando la operación algebraica y luego integrando. Discutir los resultados.

Actividad No. 16	**Cada quien con su cada cual**	**Individual – extra aula**
Propósito: Resolución de las integrales propuestas.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga la solución correcta a las integrales propuestas.		
Tiempo estimado para la actividad: 90 minutos		

Descripción de la actividad:

Identifica la sustitución trigonométrica adecuada dependiendo del tipo de integrando y empléala para resolver los problemas propuestos. Si alguna de las integrales pudiera resolverse por algún método visto anteriormente, indique cuál.

1. $\int \frac{x^2}{\sqrt{36 - x^2}} dx$ 2. $\int \frac{1}{x\sqrt{9 + x^2}} dx$ 3. $\int \frac{1}{x\sqrt{x \;\; - 25}} dx$

4. $\int \frac{x}{x^2 + 9} dx$ 5. $\int \frac{1}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} dx$ 6. $\int \frac{x^3}{\sqrt{9x^2 + 49}} dx$

2.4 Integración de funciones racionales.

Conocimiento previo: Tipos simples de factorización y Teoría de las ecuaciones

Actividad No. 17	**Factovigorizante**	**Individual – extra aula**
Propósito: Activar conocimiento previo sobre los diferentes tipos de factorización.		
Criterio de evaluación: Se evaluará la tabla que contenga la información correcta para cada polinomio dado.		
Tiempo estimado para la actividad: 30 minutos		

Descripción de la actividad:

El estudiante llenará la tabla propuesta factorizando e identificando los tipos de factores encontrados en cada polinomio dado.

Forma del factor	**Nombre del factor**
ax+b	lineal distinto
$(ax+b)^k$	lineal repetido
ax^2+bx+c	cuadrático distinto
$(ax^2+bx+c)^k$	cuadrático repetido

Polinomio	Factores	Lineales distintos	Lineal repetido	Cuadrático distinto	Cuadrático repetido
$x^2 - 1$	**(x+1)(x-1)**	**X X**			
$4x^2 - 9$					
$X^2 + x - 2$					
$X^2 + 4x + 3$					
$2x^2 + x - 1$					
$X^3 - 4x$					
$X^2 - 2x - 8$					
$X^3 + x^2$					
$X^3 - 4x^2 + 4x$					
$X^3 + x^2 - x - 1$					
$X^3 + x$					
$X^3 - 8$					
$X^4 - 2x^2 - 8$					
$16x^4 - 1$					
$X^3 - x^2 + x + 3$					
$X^4 + 6x^2 + 9$					

Este método se aplica cuando el integrando es una función racional propia, es decir, de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, en donde *Q(x)* se puede descomponer en factores lineales o cuadráticos. En caso de que la función sea impropia, se debe hacer la división de polinomios y expresar el resultado en la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = Cociente + \frac{Residuo}{Q(x)}$$

En donde: $\frac{Residuo}{Q(x)}$ $es\ una\ fracción\ propia.$

Este método consiste en descomponer una función racional en la suma de sus fracciones parciales o fracciones simples para poder aplicar las fórmulas básicas de la integración.

Para descomponer una fracción racional propia, reducida a su mínima expresión, en fracciones parciales se considera el teorema sobre fracciones parciales que se muestra en la siguiente tabla:

Tipos de factores	Forma del factor	Fracción parcial
Caso I. Factores lineales distintos	$ax+b$	A cada factor lineal le corresponde una fracción de la forma $\frac{A}{ax+b}$
Caso II. Factores lineales repetidos	$(ax+b)^k$	A cada factor lineal repetido le corresponde la suma de k fracciones parciales de la forma: $\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots\frac{A_k}{(ax+b)^k}$
Caso III. Factores cuadráticos distintos	ax^2+bx+c	A cada factor cuadrático le corresponde una fracción de la forma: $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
Caso IV. Factores cuadráticos repetidos.	$(ax^2+bx+c)^k$	A cada factor cuadrático repetido le corresponde la suma de k fracciones de la forma: $\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$

En donde: A, A_1, A_2.......A_k y B, B_1, B_2.......B_k son constantes.

Para calcular los valores de las constantes se utiliza el método general, que consta de los siguientes pasos:

Paso 1: Factorizar el denominador de la función racional dada y expresarla en función de las fracciones parciales que correspondan.
Paso 2: Simplificar la ecuación, multiplicando en ambos lados por el denominador de la función racional.
Paso 3: Efectuar operaciones en el lado derecho de la ecuación
Paso 4: Agrupar términos semejantes en el lado derecho de la ecuación.
Paso 5: Igualar los coeficientes de los términos semejantes en ambos lados de la ecuación, para formar ecuaciones lineales.
Paso 6: Resolver el sistema de ecuaciones lineales.
Paso 7: Se sustituyen los valores encontrados en la suma de las fracciones parciales.

Cuando se tiene una integral de una función racional, solo se sustituye la función racional por la suma de sus fracciones parciales encontradas por el método anterior, luego se aplica algún o algunos de los métodos vistos con anterioridad para resolver la integral.

Ejemplo: Resuelva cada una de las siguientes integrales:

En este ejemplo se aplica el método mencionado con anterioridad.

1) $\int \frac{6x+1}{4x^2-1}\,dx$

Paso 1: Factorizando el denominador de la función racional dada y expresándola en función de las fracciones parciales que corresponden.

$$\frac{6x+1}{(2x+1)(2x-1)}=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{2x-1}$$

Paso 2: Se multiplica ambos lados de la ecuación por $(2x+1)(2x-1)$

$$6x+1=A(2x-1)+B(2x+1)$$

Paso 3: Efectuando operaciones en el lado derecho de la ecuación
$6x+1=2Ax-A+2Bx+B$

Paso 4: Agrupando términos semejantes en el lado derecho de la ecuación.
$6x+1=(2A+2B)x+(-A+B)$

Paso 5: Igualando los coeficientes de los términos semejantes en ambos lados de la ecuación, para formar ecuaciones lineales.
$Ec. 1$: $\quad 2A+2B=6$
$Ec. 2$: $\quad -A+B=1$

Paso 6: Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales generado en el paso anterior, resulta:

$$A=1\ y\ B=2$$

Paso 7: Sustituyendo los valores encontrados en la suma de fracciones parciales:

$$\int\frac{6x+1}{4x^2-1}dx=\int\left(\frac{1}{2x+1}+\frac{2}{2x-1}\right)dx$$

$$\int\frac{6x+1}{4x^2-1}\,dx=\int\frac{dx}{2x+1}+\int\frac{2\,dx}{2x-1}=\frac{1}{2}ln|2x+1|+ln|2x-1|+C$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos, el resultado se puede expresar como:

$$\int\frac{6x+1}{4x^2-1}\,dx=\ln(2x-1)\sqrt{2x+1}+C$$

Otra manera de encontrar los coeficientes es, a partir del paso 2, aprovechar el hecho de que si dos polinomios son iguales, toman el mismo valor al darle valores a la variable "*x*". Los siguientes ejemplos ilustran lo anterior.

2) $\int\frac{x^2+4}{x^3-x}\,dx$

Paso 1: Factorizando el denominador de la función racional dada y expresándola en función de las fracciones parciales que corresponden, resulta:

$$\frac{x^2+4}{x(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}$$

Paso 2: Multiplicando ambos lados de la ecuación por $x(x+1)(x-1)$ y simplificando, resulta:

$$x^2+4=A(x+1)(x-1)+B(x)(x-1)+C(x)(x+1)$$

Si "*x*" toma el valor de cero, el resultado en ambos lados de la igualdad debe ser el mismo, esto es:

Cuando $x=0$
$4=A(1)(-1)$
¿Cuánto debe valer "A" para que se cumpla lo anterior?
Se despeja "A" y resulta que $A=\ -4$

De la misma manera cuando $x=1$
$5=C(1)(2); despejando\ C=\dfrac{5}{2}$

De la misma manera cuando $x=-1$
$5=B(-1)(-2); despejando\ B=\dfrac{5}{2}$

Nota: ¿Observaste que los valores que se le dan a "x" son los que hacen cero a cada factor lineal?

Sustituyendo la fracción por la suma de sus fracciones parciales, queda:

$$\int \frac{x^2+4}{x^3-x}\,dx=\int\left(\frac{-4}{x}+\frac{5/2}{x+1}+\frac{5/2}{x-1}\right)dx$$
$$\int \frac{x^2+4}{x^3-x}\,dx=\int\frac{-4}{x}dx+\int\frac{5/2}{x+1}dx+\int\frac{5/2}{x-1}dx=-4\int\frac{dx}{x}+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{x-1}$$

$$\int \frac{x^2+4}{x^3-x}\,dx=\ -4Ln|x|+\frac{5}{2}ln|x+1|+\frac{5}{2}ln|x-1|+C$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos, el resultado se puede expresar como:

$$\int \frac{x^2+4}{x^3-x}\,dx=ln\left|\frac{(x^2-1)^{5/2}}{x^4}\right|+C$$

3) $\int \frac{\boldsymbol{2x+3}}{\boldsymbol{x^3+x^2}}\boldsymbol{dx}$

Factorizando el denominador de la función racional dada y expresándola en función de las fracciones parciales que corresponden, resulta:

$$\frac{2x+3}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $x^2(x+1)$ y simplificando, resulta:

$2x + 3 = A(x)(x + 1) + B(x + 1) + C(x^2)$

Cuando $x = 0$
$3 = B(1); despejando\ B = 3$

Cuando $x = -1$
$1 = C(-1)^2; despejando\ C = 1$

Efectuando operaciones en el lado derecho de la ecuación, con los valores de B = 3 y C = 1

$2x + 3 = A(x)(x + 1) + 3(x + 1) + x^2$
$2x + 3 = Ax^2 + Ax + 3x + 3 + x^2$

Agrupando términos semejantes en el lado derecho de la ecuación.

$2x + 3 = x^2(A + 1) + x(A + 3) + 3$

Igualando los coeficientes de los términos semejantes en ambos lados de la ecuación, para formar ecuaciones lineales.

$Ec. 1: A + 1 = 0; Ec. 2: A + 3 = 2$

Resolviendo para encontrar el valor de "A", se despeja, ya sea de la Ec.1 o de la Ec.2, resulta:

$A = -1$

Sustituyendo la fracción por la suma de sus fracciones parciales, queda:

$$\int \frac{2x + 3}{x^3 + x^2} dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x + 1}\right) dx$$

$$\int \frac{2x + 3}{x^3 + x^2} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{3}{x^2} dx + \int \frac{1}{x + 1} dx = -1 \int \frac{dx}{x} + 3 \int x^{-2} dx + \int \frac{dx}{x + 1}$$

$$\int \frac{2x + 3}{x^3 + x^2} dx = -ln|x| + 3\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + ln|x + 1| + C = -ln|x| - \frac{3}{x} + ln|x + 1| + C$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos, el resultado se puede expresar como:

$$\int \frac{2x + 3}{x^3 + x^2} dx = ln\left(\frac{x + 1}{x}\right) - \frac{3}{x} + C$$

4) $\int \frac{-2x}{x^3+x^2+x+1} \boldsymbol{dx}$

Factorizando el denominador y escribiendo las fracciones parciales que corresponden

$$\frac{-2x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $(x+1)(x^2+1)$ y simplificando, resulta:

$$-2x = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)$$

$Cuando\ x = -1$
$2 = A(2); despejando\ A = 1$

Efectuando operaciones en el lado derecho de la ecuación, con A = 1
$-2x = x^2 + 1 + Bx^2 + Bx + Cx + C$

Agrupando términos semejantes

$$-2x = x^2(1+B) + x(B+C) + (1+C)$$

Igualando los coeficientes de los términos semejantes en ambos lados de la ecuación, para formar ecuaciones lineales, resulta:

$$Ec.1{:}\ 1 + B = 0\ ; Ec.2{:}\ B + C = -2\ ; Ec.3{:}\ 1 + C = 0$$

Resolviendo para B y C, resulta:

$$B = -1\ ; C = -1$$

Sustituyendo la fracción por la suma de sus fracciones parciales, queda:

$$\int \frac{-2x}{x^3+x^2+x+1}\,dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x-1}{x^2+1}\right) dx$$

$$\int \frac{-2x}{x^3+x^2+x+1}\,dx = \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{-x-1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{x\,dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$\int \frac{-2x}{x^3+x^2+x+1}\,dx = ln|x+1| - \frac{1}{2} ln|x^2+1| - Tan^{-1}(x) + C$, o bien:

Aplicando las propiedades de los logaritmos, el resultado se puede expresar como:

$$\int \frac{-2x}{x^3+x^2+x+1}\,dx = ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right) - Tan^{-1}(x) + C$$

5) $\int \frac{3x^3+2x^2+6x+11}{x^4+5x^2+4}\,dx$

Factorizando el denominador y escribiendo las fracciones parciales que corresponden

$$\frac{3x^3+2x^2+6x+11}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $(x^2+1)(x^2+4)$ y simplificando, resulta:

$$3x^3+2x^2+6x+11=(Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2+1)$$

Efectuando operaciones en el lado derecho de la ecuación:

$$3x^3+2x^2+6x+11=Ax^3+4Ax+Bx^2+4B+Cx^3+Cx+Dx^2+D$$

Agrupando términos semejantes:

$$3x^3+2x^2+6x+11=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(4A+C)x+(4B+D)$$

Igualando los coeficientes de los términos semejantes en ambos lados de la ecuación, para formar ecuaciones lineales, resulta:

$Ec.1$: $A+C=3$
$Ec.2$: $B+D=2$
$Ec.3$: $4A+C=6$
$Ec.4$: $4B+D=11$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado en el paso anterior, resulta:

$A=1; B=3; C=2; D=-1$

Sustituyendo la fracción por la suma de sus fracciones parciales, queda:

$$\int\frac{3x^3+2x^2+6x+11}{x^4+5x^2+4}dx=\int\left(\frac{x+3}{x^2+1}+\frac{2x-1}{x^2+4}\right)dx$$

$$\int\frac{3x^3+2x^2+6x+11}{x^4+5x^2+4}dx=\int\frac{x+3}{x^2+1}dx+\int\frac{2x-1}{x^2+4}dx$$

$$\int\frac{3x^3+2x^2+6x+11}{x^4+5x^2+4}dx=\int\frac{x}{x^2+1}dx+3\int\frac{dx}{x^2+1}+2\int\frac{x}{x^2+4}dx-\int\frac{dx}{x^2+4}$$

$$\int\frac{3x^3+2x^2+6x+11}{x^4+5x^2+4}dx=\frac{1}{2}ln|x^2+1|+3Tan^{-1}(x)+ln|x^2+4|-\frac{1}{2}Tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos, el resultado se puede expresar como:

$$\int\frac{3x^3+2x^2+6x+11}{x^4+5x^2+4}dx=\ln(x^2+4)\sqrt{x^2+1}+3Tan^{-1}(x)-\frac{1}{2}Tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

6) $\int \frac{3x^4+x^3+20x^2+3x+31}{(x+1)(x^2+4)^2} dx$

Como el denominador ya está factorizando, se escriben las fracciones parciales que corresponden:

$$\frac{3x^4 + x^3 + 20x^2 + 3x + 31}{(x + 1)(x^2 + 4)^2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 4)^2}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $(x + 1)(x^2 + 4)^2$ y simplificando, resulta:

$$3x^4 + x^3 + 20x^2 + 3x + 31 = A(x^2 + 4)^2 + (Bx + C)(x + 1)(x^2 + 4) + (Dx + E)(x + 1)$$

Efectuando operaciones y agrupando términos semejantes en el lado derecho de la ecuación, resulta:

$$3x^4 + x^3 + 20x^2 + 3x + 31 = (A + B)x^4 + (B + C)x^3 + (8A + 4B + C + D)x^2 + (4B + 4C + D + E)x + (16A + 4C + E)$$

Igualando los coeficientes de los términos semejantes en ambos lados de la ecuación, para formar ecuaciones lineales, resulta:

$Ec1.:\quad A + B = 3$
$Ec.2:\quad B + C = 1$
$Ec.3:\quad 8A + 4B + C + D = 20$
$Ec.4:\quad 4B + 4C + D + E = 3$
$Ec.5:\quad 16A + 4C + E = 31$

$Cuando\ x = -1$
$50 = A(25); despejando\ A = 2$

Resolviendo el sistema, a partir de A = 2, resulta:

$B = 1; C = 0; D = 0; E = -1$

Sustituyendo la fracción por la suma de sus fracciones parciales, queda:

$$\int \frac{3x^4 + x^3 + 20x^2 + 3x + 31}{(x + 1)(x^2 + 4)^2} dx = \int \left[\frac{2}{x + 1} + \frac{x}{x^2 + 4} - \frac{1}{(x^2 + 4)^2}\right] dx$$

$$\int \frac{3x^4 + x^3 + 20x^2 + 3x + 31}{(x + 1)(x^2 + 4)^2} dx = \int \frac{2\,dx}{x + 1} + \int \frac{x\,dx}{x^2 + 4} - \int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2}$$

$$\int \frac{3x^4 + x^3 + 20x^2 + 3x + 31}{(x + 1)(x^2 + 4)^2} d = 2ln|x + 1| + \frac{1}{2}ln|x^2 + 4| - \frac{1}{16}Tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{8(x^2 + 4)} + C$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos, el resultado se puede expresar como:

$$\int \frac{3x^4 + x^3 + 20x^2 + 3x + 31}{(x + 1)(x^2 + 4)^2} dx = ln(x + 1)^2\sqrt{x^2 + 4} - \frac{1}{16}Tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{8(x^2 + 4)} + C$$

Nota: Resolver $\int \frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}$ implica utilizar el método de sustitución trigonométrica.

7) $\int \frac{x^5+2}{x^2-1}\, dx$

Como la fracción racional dada es impropia, primero se hace la división de polinomios y la integral se reexpresa como:

$$\int \frac{x^5+2}{x^2-1}\,dx = \int \left(x^3 + x + \frac{x+2}{x^2-1}\right) dx = \int x^3 dx + \int x dx + \int \frac{x+2}{x^2-1} dx$$

La tercera integral es la que se descompone en fracciones parciales, ya que las dos primeras se resuelven por reglas básicas.

Factorizando el denominador y escribiendo las fracciones parciales que corresponden

$$\frac{x+2}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $(x+1)(x-1)$ y simplificando, resulta:

$$x + 2 = A(x-1) + B(x+1)$$

$Cuando\ x = 1;$

$3 = B(2); despejando\ B = \frac{3}{2}$

$Cuando\ x = -1;$

$1 = A(-2); despejando\ A = \frac{-1}{2}$

Sustituyendo la fracción por la suma de sus fracciones parciales, queda:

$$\int \frac{x^5+2}{x^2-1}\,dx = \int \left(x^3 + x - \frac{1/2}{x+1} + \frac{3/2}{x-1}\right) dx$$

$$\int \frac{x^5+2}{x^2-1}\,dx = \int x^3 dx + \int x dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-1}$$

$$\int \frac{x^5+2}{x^2-1}\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}ln|x+1| + \frac{3}{2}ln|x-1| + C$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos, el resultado se puede expresar como:

$$\int \frac{x^5+2}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + ln\left[\frac{(x-1)^{3/2}}{\sqrt{x+1}}\right] + C$$

Ejercicio 2.4

Resuelva cada una de las siguientes integrales:

1) $\displaystyle\int \frac{-x+8}{x^2-6x+8}\,dx$

2) $\displaystyle\int \frac{x^2+12x-12}{x^3-4x}\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{11x^2+5x-4}{2x^3-x^2}\,dx$

4) $\displaystyle\int \frac{-2x^3-5x^2+8x+3}{x^4-2x^2+1}\,dx$

5) $\displaystyle\int \frac{4x^3-4x^2+2x-3}{x^4+x^2}\,dx$

6) $\displaystyle\int \frac{4x^3-5x^2+16x-45}{x^4+13x^2+36}\,dx$

7) $\displaystyle\int \frac{3x^3+7x^2+15x+16}{x^4+x^3+4x^2+4x}\,dx$

8) $\displaystyle\int \frac{3x^4-4x^2-4x+3}{(x+2)(x^2+1)^2}\,dx$

9) $\displaystyle\int \frac{2x^3+3x^2+4x+5}{x^3-x}\,dx$

10) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4x+3}$

Solución al ejercicio 2.4

1) $2\ln|x-4|-3\ln|x-2|+C$

2) $\ln\left|\dfrac{x^3\,(x-2)^2}{(x+2)^4}\right|+\mathrm{C}$

3) $\ln\left|x^3(2x-1)^{5/2}\right|-\dfrac{4}{x}+C$

4) $\ln\left|\dfrac{(x+1)}{(x-1)^3}\right|+\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}+C$

5) $2\ln|x|+\dfrac{3}{x}+\ln|x^2+1|-\tan^{-1}x+C$

6) $2\ln|x^2+9|-\dfrac{5}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right)+C$

7) $4\ln|x|-\ln|x+1|+\dfrac{3}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right)+C$

8) $\ln|(x+2)^3|+\dfrac{1}{x^2+1}+C$

Actividad No. 18	**¿Sabes teoría?**	**Individual – en el aula**
Propósito: Desarrollo de conceptos		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte del cuadro sinóptico que contenga la descripción correcta a cada método de integración.		
Tiempo estimado para la actividad: 15 minutos		

Descripción de la actividad:

Llena el cuadro sinóptico a dos columnas explicando cuando se aplica cada uno de los métodos de integración.

Método de Integración	Cuando se aplica
Por partes	

	¿Hay excepciones? Si ___ No____
Casos trigonométricos	
Sustitución trigonométrica	
Fracciones parciales	

Actividad No. 19	**Uy que miedo**	**Individual – extra aula**
Propósito: Repaso de los métodos de integración.		
Criterio de evaluación: Se evaluará un reporte que contenga el cuadro sinóptico contestado correctamente		
Tiempo estimado para la actividad: 1 hora		

Descripción de la actividad:

La siguiente tabla presenta una lista de integrales. Escribe en el espacio indicado el método que usarías para integrar, justifica plenamente tu respuesta.

Integral	Método de integración	Justificación
1) $\int \boldsymbol{Tan\ 4x\ dx}$		
2) $\int \boldsymbol{Ln\ x\ dx}$		
3) $\int \frac{\boldsymbol{Cos\ 3x}}{\boldsymbol{Sen\ 3x}}\ \boldsymbol{dx}$		
4) $\int x^2(2x^3 + 3)^5$**dx**		

5) $\int xe^x\ dx$		
6) $\int \frac{x-1}{x^2-x-2}$ dx		
7) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+16}}\ dx$		
8) $\int Cos^3(5x)dx$		
9) $\int \frac{dx}{x^2+16}$		
10) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$		

Actividad No. 20	**"La Matona"**	**En equipo – extra aula**
Propósito: Resolver problemas de ingeniería utilizando los métodos de integración		
Criterio de evaluación: Se evaluará la presentación oral que muestre el desarrollo claro, ordenado y coherente por parte del equipo.		
Tiempo estimado para la actividad: 50 minutos		

Descripción de la actividad:

1. Hacer una presentación oral que muestre los planteamientos y la solución a un problema elegido al azar por el docente.
2. Responder a los cuestionamientos de los compañeros de clase.

Problemas propuestos:

Integración por partes

1. Valor actual.

Encontrar el valor presente de un flujo de ingreso continuo en dólares por año c(t) si:

$$P = \int_0^{t_1} c(t)e^{-rt}\,dt$$

Donde P es el valor presente, t_1 es el tiempo en años y r es la tasa de interés anual compuesto continuo. Para:

a) c(t) = 100 000 + 4 000t; r = 5 %; t_1 = 10

b) c(t) = 30 000 + 500t; r = 7 %; t_1 = 5

Potencias de funciones trigonométricas

2. Volumen.

El volumen de un sólido que se genera al girar una región con respecto al eje X, está dado por:
$V = \pi \int_0^{\pi} Sen^2\, x\, dx$, en unidades cúbicas.
Encontrar el volumen de dicho sólido.

Sustitución trigonométrica
3. Intensidad de campo.

La intensidad de campo H de un imán de longitud 2L sobre una partícula a r unidades del centro del imán es:

$$H = \frac{2mL}{(r^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Donde ± m son los polos del imán. Encontrar la intensidad de campo media cuando la partícula se mueve de 0 a R unidades del centro evaluando la integral

$$H = \frac{1}{R}\int_0^R \frac{2mL}{(r^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}}\, dr$$

Fracciones parciales
4. Modelo de epidemias

Un solo individuo infectado entra en una comunidad de n individuos susceptibles. Sea x el número de individuos recientemente infectados en el momento t. El modelo de epidemias común asume que la enfermedad se extiende a un ritmo proporcional al producto del número total infectado y al número no infectado todavía. Así, dx / dt = K (x+1)(n – x) y se obtiene:

$$\int \frac{1}{(x+1)(n-x)}\, dx = \int K\, dt$$

Resolver para “x” como una función de t.

Capítulo 3. Aplicaciones de la integral definida

Competencia Particular 3:
Formular la integral definida mediante el análisis de datos o la interpretación geométrica para resolver problemas de área de una región en el plano, volumen de un sólido de revolución y longitud de arco.

Elemento de competencia 6:
Formular la integral definida mediante la interpretación gráfica de datos para resolver problemas de área, volumen y longitud de arco.

Conocimiento previo: Continuidad de funciones, gráfica de funciones, notación de las funciones.

Actividad No. 21	**Actívate**	**Individual – extra aula**
Propósito: Activación del conocimiento previo sobre gráficas de funciones		

Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga el análisis y gráfico correcto de cada una de las funciones dadas**.**	
Tiempo estimado para la actividad: 1 hora	

Descripción de la actividad:
1) Para cada una de las siguientes funciones trazar su gráfica, determinar su continuidad y si es posible, expresarla como f(x) y como f(y).

a) $y = x^2$ d) $y = 3(x^3 – x)$
b) $y = x^3$ e) $x = 4 – y^2$
c) $y = \sqrt{x}$ f) $x = 4$
g) $y = - 2$ Nota: Puedes usar software de graficación.

3.1 Área entre dos curvas.

Para calcular el área entre dos curvas debemos partir del análisis de la gráfica de la región considerando que:

1) Si elegimos utilizar el "dx", entonces los límites de la región están sobre el "Eje x", y el área está dada por:

$$A = \int_a^b [(Función\ de\ arriba) - (función\ de\ abajo)]dx$$

Utilizando funciones de x.

2) Si elegimos utilizar el "dy", entonces los límites de la región están sobre el "Eje y", y el área está dada por:

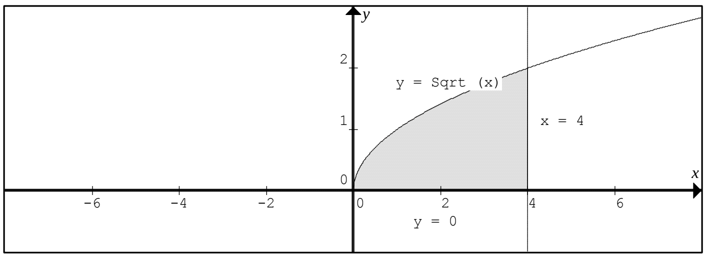
$$A = \int_a^b [(función\ derecha) - \ (Función\ izquierda)]dy$$

Utilizando funciones de y.

Ejemplo 1: Formula y calcula la integral definida que da el área de la región limitada por las gráficas de:

$$y = \sqrt{x}\,; y = 0; x = 4$$

Solución:
Primeramente debemos trazar la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas, lo cual resulta:



Utilizando el "dx" y considerando los límites con respecto al eje X, nos resulta que:

- Los límites de la región son de 0 a 4
- La función de arriba está dada por $y = \sqrt{x}$
- La función de abajo está dada por y = 0
- Sustituyendo en la fórmula para calcular el área y resolviendo la integral definida, resulta:

$$A = \int_a^b [(Función\ de\ arriba) - (función\ de\ abajo)]dx$$

$$A = \int_0^4 (\sqrt{x} - 0)dx$$

$$A = \int_0^4 (\sqrt{x} - 0)dx = \int_0^4 x^{1/2}dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^4 = \frac{2}{3}\left[(4)^{3/2} - (0)^{3/2}\right] = \frac{2}{3}(8) = \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{u^2}$$

Utilizando el "dy" y considerando los límites con respecto al eje Y, nos resulta que:
- Los límites de la región son de 0 a 2
- La función derecha está dada por x = 4
- La función izquierda está dada por $x = y^2$
- Sustituyendo en la fórmula para calcular el área y resolviendo la integral definida, resulta:

$$A = \int_a^b [(función\ derecha) - (Función\ izquierda)]dy$$

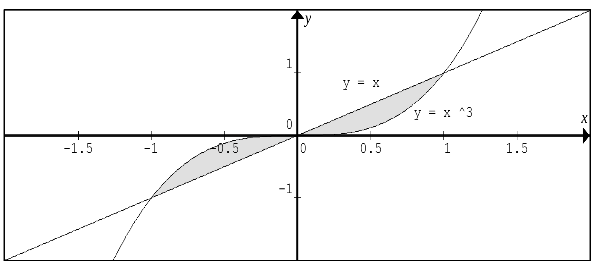
$$A = \int_0^2 (4 - y^2)dy$$

$$A = \int_0^2 4dy - \int_0^2 y^2 dy = \left(4y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{u^2}$$

Ejemplo 2: Formula y calcula la integral definida que da el área de la región acotada por las gráficas de: $y = x^3$; $y = x$

Solución:

Primeramente debemos trazar la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas, lo cual resulta:



Analizando la gráfica de la región podemos observar que se forman dos regiones iguales, R_1 y R_2, por lo tanto se puede calcular el área de una de ellas y el área total está dada por la suma de las dos, es decir, $A = A_1 + A_2$

Utilizando el "dx", considerando los límites de la región con respecto al eje X, y analizando la región R_1 tenemos que:

- Los límites de la región son de -1 a 0
- La función de arriba está dada por $y = x^3$
- La función de abajo está dada por $y = x$
- Sustituyendo en la fórmula y resolviendo la integral definida para calcular el A_1, resulta:

$$A = \int_a^b [(Función\ de\ arriba) - (función\ de\ abajo)]dx$$

$$A_1 = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx$$

$$A_1 = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\bigg|_{-1}^{0} = (0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{4}u^2}$$

$$A = A_1 + A_2 = 2A_1$$

$$A = 2\left(\frac{1}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2}u^2}$$

En el siguiente ejemplo se muestra primero, el análisis matemático, a partir de las funciones que forman la región para después trazar la gráfica de la región.

Ejemplo 3: Formula y calcula la integral definida que da el área de la región acotada por las gráficas de: $x = y^2 + 3y + 3; x = -y$

Procedimiento:

1) Encontrar los puntos de intersección a través de un sistema de ecuaciones para establecer los límites de la región.

Haciendo una igualación de *x* = *x* con las ecuaciones dadas y resolviendo para "*y*", resulta:

$y^2 + 3y + 3 = -y$
$y^2 + 4y + 3 = 0$
$(y + 3)(y + 1) = 0$
$y + 3 = 0;\ despejando: y = -3; para\ y = -3, entonces\ x = 3$
$y + 1 = 0;\ despejando: y = -1; para\ y = -1, entonces\ x = 1$

Por lo tanto los puntos de intersección son:$P_1(3,-3)$ y $P_2(1,-1)$

2) Tabular algunos puntos de cada función dada, de preferencia valores entre los límites.

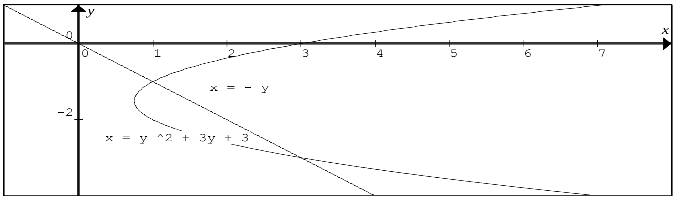
Ec. 1: $x = y^2 + 3y + 3$

x	3	1	1
y	-3	-2	-1

Ec.2: $x = -y$

x	3	2	1
y	-3	-2	-1

3) Trazar la gráfica de cada una de las funciones dadas.



4) Formular la integral que da el área de la región.

Utilizando "dy" y considerando los límites con respecto al eje Y, nos resulta que:
- Los límites de la región son de -3 a -1
- La función derecha está dada por: $x = -y$
- La función izquierda está dada por: $x = y^2 + 3y + 3$
- Sustituyendo en la fórmula para calcular el área y resolviendo la integral definida, resulta:

$$A = \int_a^b [(función\ derecha) - (Función\ izquierda)]dy$$

$$A = \int_{-3}^{-1} [-y - (y^2 + 3y + 3]dy = \int_{-3}^{-1} (-y^2 - 4y - 3)dy$$

5) Resolver la integral para calcular el área.

$$A = \frac{-y^3}{3} - 4\left(\frac{y^2}{2}\right) - 3y \Big|_{-3}^{-1} = \left(\frac{1}{3} - 2 + 3\right) - (9 - 18 + 9) = \boldsymbol{\frac{4}{3}u^2}$$

Ejercicio 3.1

Calcular el área de cada una de las regiones que se forman con las gráficas de las funciones dadas:
1) $y = x^2 + 3; y = 0; x = 0; x = 2$

2) $y = x^2; y = 0; x = 2$

3)$y = x^2; x = 0; y = 2$

4) $y = \sqrt{x}; Eje$ x; $x = 2$

5) $f(x) = x^2 - 2x \,; g(x) = 0$

6) $y = \frac{1}{x}; y = 0; x = 1; x = 3$

7) $x = y^2; x = -1; Eje$ x; $y = 3$

8) $f(y) = y^2 - 4y + 6; g(y) = 10 - y$

9) $y = x^3 + x^2 - 2x; y = 0$

10) $2x - 5y + 9 = 0; y = 2x - 3; 2x + 3y + 1 = 0$

11) $y = Sen(x); y = 0; 0 \leq x \leq \pi$

12) $y = Ln\, x; y = Ln\, 3; x = 1$

13) $y = \frac{1}{x^2-4}; x = 3; x = 4; y = 0$

14) $y = \sqrt{4 - x^2}\,; y = 0$

15) $y = Sen^2(x); x = 0; x = \frac{\pi}{3}; Eje$ "x"

Solución al Ejercicio 3.1

1) $A = \frac{26}{3}u^2$ 2) $A = \frac{8}{3}u^2$ 3) $A = \frac{4\sqrt{2}}{3} \approx 1.885u^2$ 4) $A = \frac{4\sqrt{2}}{3} \approx 1.885u^2$

5) $A = \frac{4}{3}u^2$ 6) $A = ln3 \approx 1.098u^2$ 7) $A = 12u^2$ 8) $A = \frac{125}{6}u^2$

9) $A = \frac{37}{12} \approx 3.08u^2$ 10) $A = 8u^2$ 11) $A = 2u^2$ 12) $A = 2 - ln3 \approx 0.9014u^2$

13) $A = ln\left(\frac{5}{3}\right)^{1/4} \approx 0.128u^2$ 14) $A = 2\pi u^2$ 15) $A = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{24} \approx 0.9165u^2$

Actividad No. 22	**La Fashion**	**Individual – en el aula**
Propósito: Formular la integral para calcular el área de una región.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga la fórmula correcta para encontrar el área para cada una de las regiones.		
Tiempo estimado para la actividad: 15 minutos		

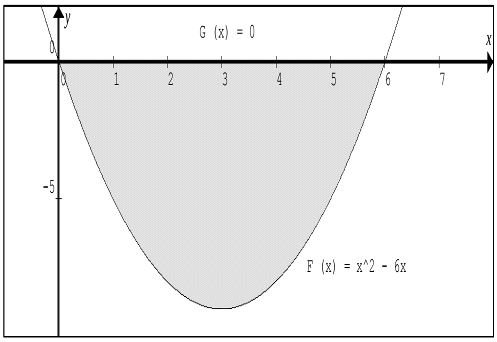
Descripción de la actividad:
El estudiante formulará la integral definida que da el área en cada una de las regiones dadas.

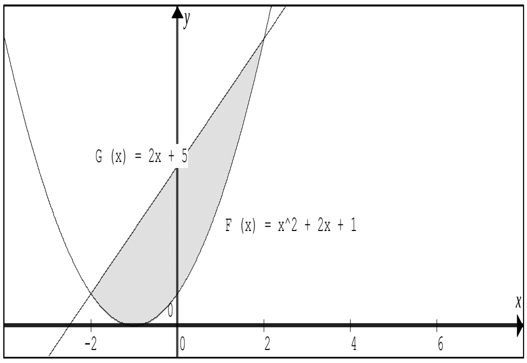
1. F(x) = x^2 – 6x ; G(x) = 0

A= ______________________________

2. F(x) = x^2 + 2x +1 ; G(x) = 2x + 5

A= __________________________________



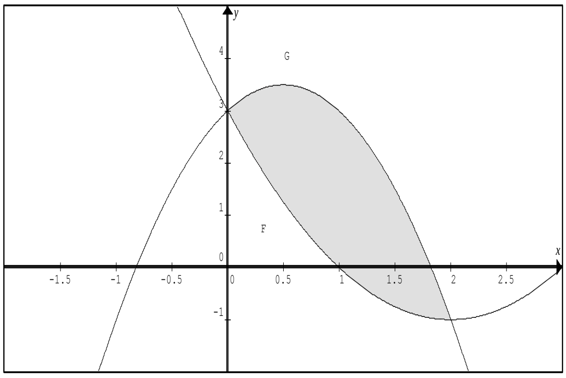


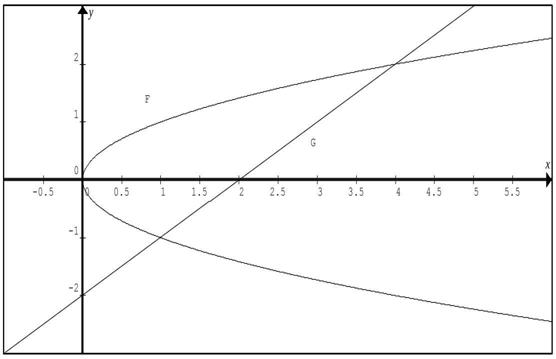
3. $F(x) = x^2 - 4x + 3$; $G(x) = -2x^2 + 2x + 3$

A=________________________________

4. $F(y) = y^2$; $G(y) = y + 2$

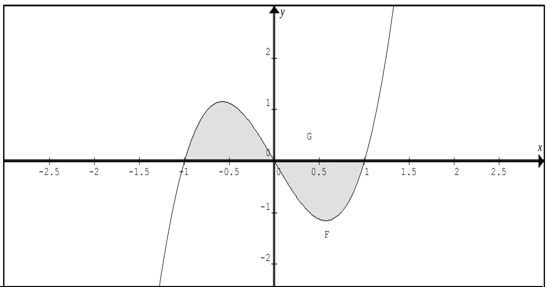
A= ________________________________





5. $F(x) = 3(x^3 - x)$; $G(x) = 0$

A=__________________________________



Actividad No. 23	No te quedes mirando	Individual – extra aula
Propósito: Familiarizarse con un asistente matemático y que lo utilice para preparar los gráficos que posteriormente analizará en clase.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga los gráficos impresos.		
Tiempo estimado para la actividad: 1 hora		

Descripción de la actividad.

Grafica las siguientes funciones con ayuda de un asistente matemático.

a) $y = x\sqrt{x^2+5}$, el eje x y la recta x=2.

b) $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, el eje x y las rectas x=-1 y x=2.

c) $y = x^2, \quad y = -x^2 + 4x$

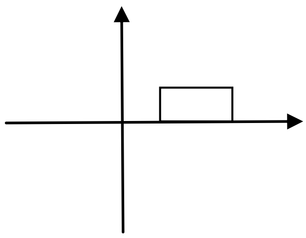
d) $y^2 = 2x - 2, \quad y = x - 5$

Nota: Los gráficos serán utilizados en el aula la sesión siguiente.
Software sugerido: Derive, Graphmatica, Matlab, etc. (Consúltalos en la Infoteca).

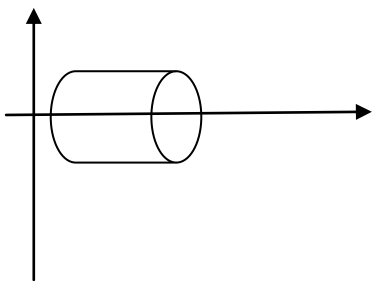
3.2 Volumen de un sólido de revolución.

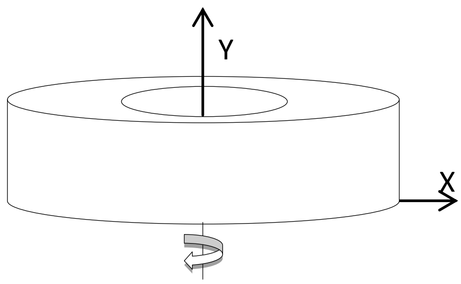
Un sólido de revolución se genera cuando se gira una región en el plano "XY" con respecto a una línea recta, llamada eje de revolución, que no puede intersectar a la región, excepto, tal vez, en su frontera. Se utilizan en la fabricación de émbolos, envases, piezas para maquinaria, etc. En nuestro estudio el eje de revolución será una recta horizontal o vertical, en caso de que sea una recta oblicua, se hace una rotación de ejes antes de hacer el análisis del volumen de dicho sólido.

Es muy importante el eje de revolución, ya que de él depende el sólido que se va a formar. Por ejemplo, si se gira una región rectangular, como se muestra en la figura 1, con respecto a los ejes "x" y "y" obtenemos:
Figura 1:



a) Sólido formado al girar con respecto al eje x   b) Sólido formado al girar con respecto al eje Y





3.2.1 Método del disco y de arandela.

Sea una región R en el plano "XY" que se va a girar alrededor de una recta horizontal o vertical, la fórmula para calcular el volumen del sólido resultante es:
(1) V$= \pi \int_a^b [(R^2(x) - r^2(x)]dx$ Cuando el eje de revolución es horizontal
(2) V$= \pi \int_a^b [(R^2(y) - r^2(y)]dy$ Cuando el eje de revolución es vertical

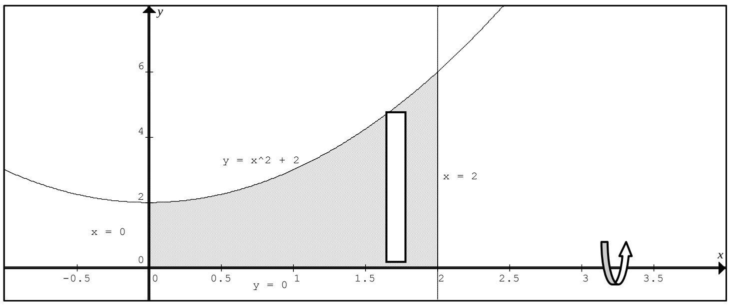
En donde:
R es el radio exterior del disco o la arandela
r es el radio interior del disco (r = 0) o la arandela
a y b son los límites de la región; pueden ser sobre el eje "X" (Fórmula 1) o sobre el eje "Y" (Fórmula 2).

Nota: Para aplicar este método se requiere que el rectángulo generado por el diferencial sea tal que al prolongarlo sea perpendicular al eje de revolución. Esto nos dará una mejor visión para determinar los radios.

Ejemplo 1:

Calcule el volumen del sólido de revolución que se forma cuando se gira la región acotada por las gráficas de: $y = x^2 + 2; y = 0; x = 0 \; y \; x = 2$ con respecto al eje "X".

Gráfica de la región:



A partir de la gráfica de la región y considerando que el sólido se forma cuando se gira la región con respecto al eje "X", resulta que:

$R(x) = x^2 + 2; r(x) = 0; a = 0 \; y \; b = 2$ y sustituyendo en la Fórmula 1, obtenemos el volumen del sólido por:

(1) V= $\pi \int_a^b [(R^2(x) - r^2(x)]dx$

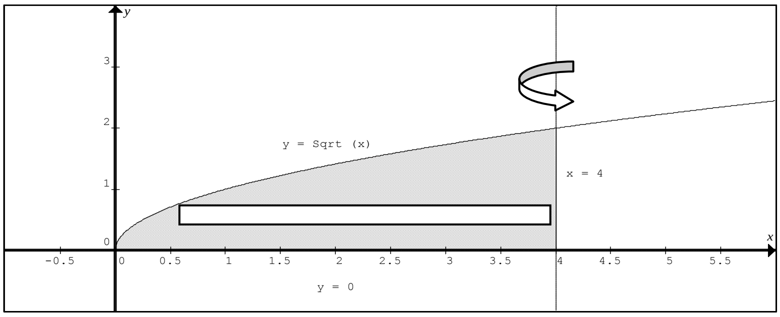
$$V = \pi \int_0^2 [(x^2+2)^2]dx = \pi \int_0^2 (x^4 + 4x^2 + 4)dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + 4x\right]_0^2$$

$$\boldsymbol{V = \frac{376}{15} \pi \, u^3}$$

Ejemplo 2:

Calcule el volumen del sólido generado cuando se gira la región limitada por las gráficas de: $y = \sqrt{x}\,; y = 0 \; y \; x = 4$ con respecto a la recta $x = 4$.

Gráfica de la región:



A partir de la gráfica de la región y considerando que el sólido se forma cuando se gira la región con respecto a la recta x = 4, resulta que:

$R(y) = 4 - y^2; r(y) = 0; a = 0 \ y \ b = 2$ y sustituyendo en la Fórmula 2, obtenemos el volumen del sólido por:

(2) V= $\pi \int_a^b [(R^2(y) - r^2(y)]dy$

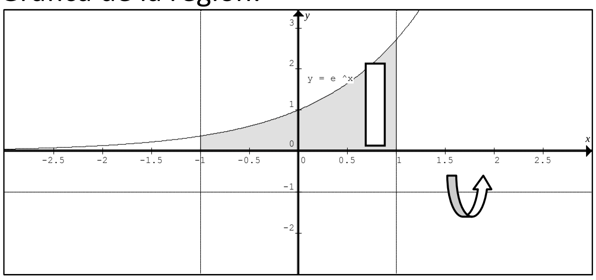
$$V = \pi \int_0^2 [(4 - y^2)^2]dy = \pi \int_0^2 (16 - 8y^2 + y^4)dy = \pi \left[16y - \frac{8y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right]_0^2$$

$$\boldsymbol{V = \frac{256}{15}\pi \, u^3}$$

Ejemplo 3:

Calcule el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por las gráficas de: $y = e^x$; $y = 0; x = -1 \ y \ x = 1$, con respecto a la recta y = -1.

Gráfica de la región:



A partir de la gráfica de la región y considerando que el sólido se forma cuando se gira la región con respecto a la recta $y = -1$, resulta que:

$R(x) = e^x + 1; r(x) = 1; a = -1 \ y \ b = 1$ y sustituyendo en la Fórmula 1, obtenemos el volumen del sólido por:

(1) V= $\pi \int_a^b [(R^2(x) - r^2(x)]dx$

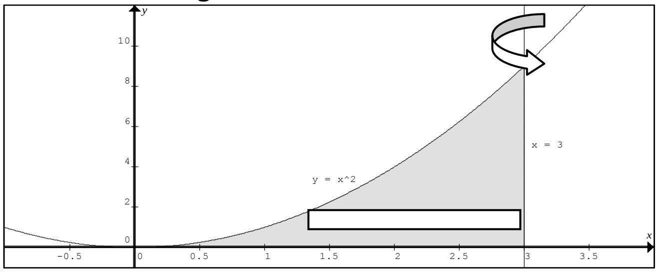
$$V = \pi \int_{-1}^{1} [(e^x + 1)^2 - (1)^2]dx = \pi \int_{-1}^{1} (e^{2x} + 2e^x)dx = \pi \left[\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x\right]_{-1}^{1}$$

$$V = \pi \left[\left(\frac{1}{2}e^2 + 2e\right) - \left(\frac{1}{2}e^{-2} + 2e^{-1}\right)\right] \approx \boldsymbol{8.326\pi \, u^3}$$

Ejemplo 4:

Calcule el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por las gráficas de: $y = x^2$; $y = 0$; $x = 1$, con respecto a la recta *x* = 3.

Gráfica de la región:



A partir de la gráfica de la región y considerando que el sólido se forma cuando se gira la región con respecto a la recta *x* = 3, resulta que:

$R(y) = 3 - \sqrt{y}; r(y) = 2; a = 0 \; y \; b = 1$ y sustituyendo en la Fórmula 2, obtenemos el volumen del sólido por:

(2) V= $\pi \int_a^b [(R^2(y) - r^2(y)]dy$

$$V = \pi \int_0^1 [(3-\sqrt{y})^2 - (2)^2]dy = \pi \int_0^1 (5 - 6\sqrt{y} + y)dy = \pi \left[5y - 4y^{\frac{3}{2}} + \frac{y^2}{2}\right]_0^1$$

$$\boldsymbol{V = \frac{3}{2}\pi \, u^3}$$

3.2.2 Método de la corteza cilíndrica.

Este es un método alternativo para calcular el volumen de un sólido de revolución. Se considera un rectángulo representativo de altura *h*, de anchura un diferencial y donde *r* denota la distancia del centro del rectángulo al eje de revolución, en donde, al girarlo con respecto a su eje de revolución se genera una capa cilíndrica.

Para calcular el volumen de un sólido de revolución con eje paralelo al eje "X" o al eje "Y" por el método de la corteza cilíndrica se usa una de las siguientes fórmulas:

(1) $V = 2\pi \int_a^b r(y)h(y)dy$ Cuando el eje de revolución es horizontal

(2) $V = 2\pi \int_a^b r(x)h(x)dx$ Cuando el eje de revolución es vertical

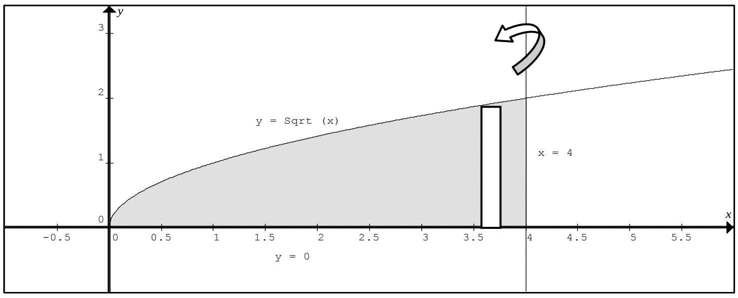
En donde: los límites de la región, *a* y *b*, pueden ser sobre el eje "Y" en la fórmula (1) o bien, sobre el eje "X" en la fórmula (2).

Nota: Para aplicar este método se requiere que el rectángulo generado por el diferencial sea tal que, al prolongarlo, sea paralelo al eje de revolución.

Ejemplo 1:

Calcule el volumen del sólido generado cuando se gira la región limitada por las gráficas de: $y = \sqrt{x}$; $y = 0\ y\ x = 4$ con respecto a la recta $x = 4$.

Gráfica de la región:



A partir de la gráfica de la región y considerando que el sólido se forma cuando se gira la región con respecto a la recta *x* = 4, resulta que:

$r(x) = 4 - x; h(x) = \sqrt{x}; a = 0\ y\ b = 4$ y sustituyendo en la fórmula (2), obtenemos el volumen del sólido por:

$$V = 2\pi \int_a^b r(x)h(x)dx = 2\pi \int_0^4 (4 - x)\sqrt{x}dx$$

$$V = 2\pi \int_0^4 \left(4x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right) dx = 2\pi \left[\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = 2\pi \left(\frac{64}{3} - \frac{64}{5}\right)$$

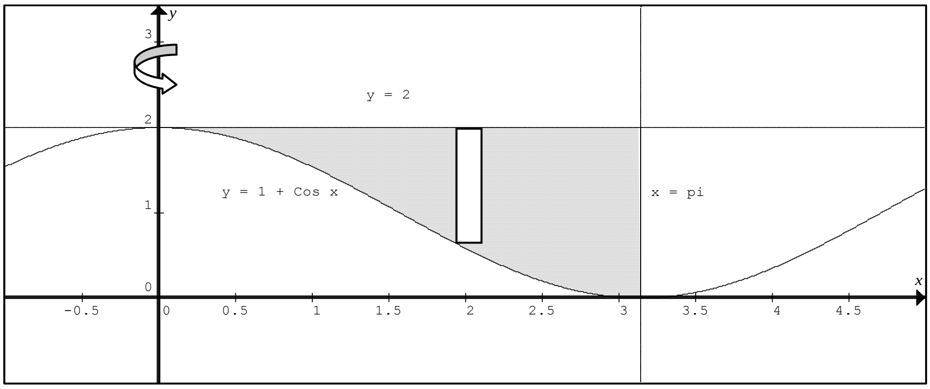
$$\boldsymbol{V = \frac{256}{15}\pi\, u^3}$$

Nota: este ejemplo es igual al ejemplo 2 del 3.2.1 pero se resolvió por el método de la corteza cilíndrica, es obvio, que los resultados son iguales.

Ejemplo 2:

Calcule el volumen del sólido que se genera al girar la región acotada por las gráficas de: $y = 1 + Cos\ x; y = 2; x = \pi$ con respecto al eje "Y".

Gráfica de la región:



A partir de la gráfica de la región y considerando que el sólido se forma cuando se gira la región con respecto al eje "Y", resulta que:

$r(x) = x; h(x) = 1 - Cos\, x; a = 0\ y\ b = \pi$ y sustituyendo en la fórmula (2), obtenemos el volumen del sólido por:

$$V = 2\pi \int_a^b r(x)h(x)dx = 2\pi \int_0^\pi x(1 - Cos\, x)dx$$

Resolviendo mediante integración por partes, resulta:

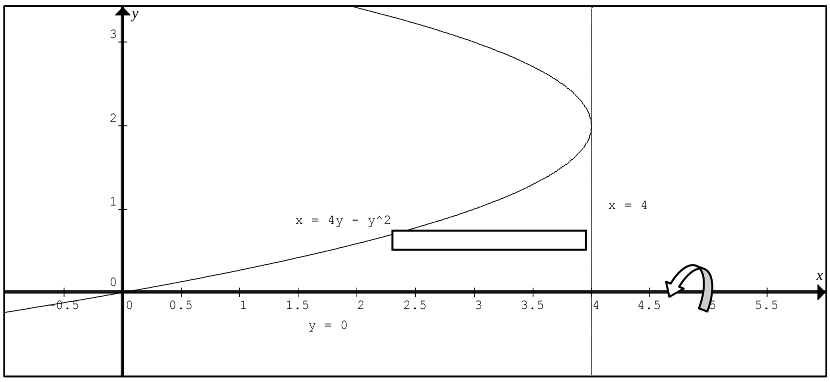
$$V = 2\pi \left[\frac{x^2}{2} - x\, Sen\, x - Cos\, x\right]_0^\pi = 2\pi \left[\left(\frac{\pi^2}{2} - \pi Sen\, \pi - Cos\, \pi\right) - (-Cos\, 0)\right]$$

$$\boldsymbol{V = \pi(\pi^2 + 4)u^3 \approx 43.57\, u^3}$$

Ejemplo 3:

Calcule el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por las gráficas de: $x = 4y - y^2; y = 0; x = 4$, con respecto al eje "X".

Gráfica de la región:



A partir de la gráfica de la región y considerando que el sólido se forma cuando se gira la región con respecto al eje "X", resulta que:

$r(y) = y; h(y) = 4 - 4y + y^2; a = 0\ y\ b = 2$ y sustituyendo en la Fórmula 1, obtenemos el volumen del sólido por:

$$V = 2\pi \int_a^b r(y)h(y)dy = 2\pi \int_0^2 y(4 - 4y + y^2)dy$$
$$V = 2\pi \int_0^2 (4y - 4y^2 + y^3)dy = 2\pi \left[2y^2 - \frac{4}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4\right]_0^2$$
$$\boldsymbol{V = \frac{8}{3}\pi\, u^3}$$

Ejercicio 3.2

Calcule el volumen del sólido de revolución generado al girar la región R alrededor del eje indicado.

1) $R: y = x^3; y = 0; x = 1$ en el eje "X"
2) $R: y = 4 - x^2; y = 2 - x$ en el eje "X"
3) $R: x = y^{3/2}; x = 0; y = 4$ en el eje "Y"
4) $R: y = Tan\, x; y = 1; x = 0$ en el eje "X"
5) $R: x = y^2; y = x - 2$ en la recta x = 4
6) $R: y = -2e^x; x = -3; x = -1; y = 0$ en la recta y = 1
7) $R: y = x - x^2; y = 0$ en el eje "Y"
8) $R: x = -y^2 + 2y; x = 0$ en el eje "X"
9) $R: x = y^3 + 1; x = 2; x = 9; y = 0$ en la recta x = 9
10) $R: x = \sqrt{y}; y = x - 1; x = 0; x = 2$ en la recta x = 3

Solución al ejercicio 3.2

1) $V = \frac{1}{7}\pi\, u^3$ 2) $V = \frac{108}{5}\pi\, u^3$ 3) $V = 64\pi\, u^3$ 4) $V \approx 1.79u^3$

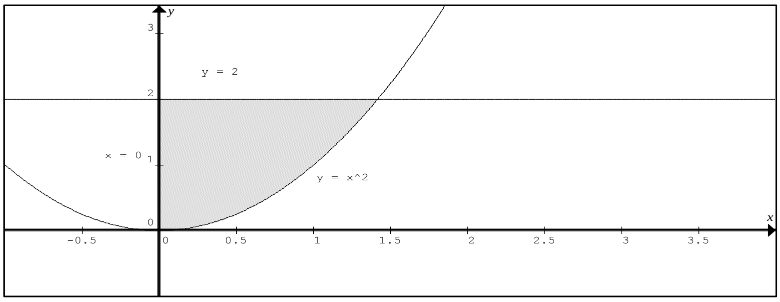
5) $V = \frac{108}{5}\pi\, u^3$ 6) $V \approx 4.83\, u^3$ 7) $V = \frac{1}{6}\pi\, u^3$ 8) $V = \frac{8}{3}\pi\, u^3$

9) $V = \frac{498}{7}\pi\, u^3$ 10) $V = \frac{28}{3}\pi\, u^3$

Actividad No. 24	**¡Qué tal pollo!**	**Individual – extra aula**
Propósito: Análisis de una región para formular y calcular el área de una región e identificar los elementos para calcular el volumen del sólido de revolución que se genere cuando se gira		

la región con respecto a un eje indicado.
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga los datos correctos para calcular el volumen del sólido generado, en cada caso.
Tiempo estimado para la actividad: 15 minutos

Descripción de la actividad:
El estudiante analizará la gráfica dada para:
1) Calcular el área de la región
2) Identificar los elementos necesarios para calcular el volumen del sólido que se genere al girar la región con respecto a:
a) la recta $x = -2$
b) la recta $y = -1$



3.3 Longitud de arco.

Si la derivada de una función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$, se dice que la función $f(x)$ representa una **curva suave** en el intervalo $[a, b]$.

Arco de una curva es la porción de una curva comprendida entre dos puntos sobre ella

Definición de longitud de arco

Sea la función $y = f(x)$ una curva suave en el intervalo $[a, b]$, la longitud de arco de f entre el punto $(a, f(a))$ y el punto $(b, f(b))$ es:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

De igual manera, para una curva suave dada por $x = g(y)$, la longitud de arco de g entre los puntos $(g(c), c)$ y $(g(d), d)$ es:

$$S = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy$$

Nota: De acuerdo a la definición anterior el procedimiento para calcular la longitud de de arco de una función consiste en derivar la función dada, elevar al cuadrado la derivada de la función, sustituir la derivada en la fórmula para calcular longitud de arco y simplificar, para finalmente integrar.

Ejemplo 1

Encontrar la longitud de arco de la función $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 1$, en el intervalo $[0, 3]$.

Derivando la función dada queda:

$$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 1 \qquad y' = x^{\frac{1}{2}} \qquad (y')^2 = x$$

Sustituyendo $(y')^2 = x$ en la definición de longitud de arco, simplificando e integrando queda:

$$S = \int_0^3 \sqrt{1 + \left[x^{\frac{1}{2}}\right]^2}\, dx = \int_0^3 \sqrt{1+x}\, dx = \int_0^3 (1+x)^{\frac{1}{2}}\, dx = \left[\frac{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^3$$

Evaluando el resultado para el intervalo dado queda,

$$S = \frac{2}{3}\left[(1+3)^{\frac{3}{2}} - (1+0)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{14}{3}$$

Ejemplo 2

Encontrar la longitud de arco de la función $y = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ en el intervalo $[0, 4]$.

Derivando la función dada queda:

$$y = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} \qquad y' = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}} \qquad (y')^2 = \frac{9}{16}x$$

Sustituyendo $(y')^2 = \frac{9}{16}x$ en la definición de longitud de arco, simplificando, completando el diferencial e integrando queda:

$$S = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{16}x}\, dx = \frac{16}{9}\int_0^4 \sqrt{u}\, du = \left[\frac{16}{9}\,\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{32}{27}\left(1 + \frac{9}{16}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 \approx 5.759$$

Ejemplo 3

Encontrar la longitud de arco de la función $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ en el intervalo $[-10, 10]$.

Derivando la función dada queda:

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad (y')^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})$$

Sustituyendo $(y')^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})$ en la definición de longitud de arco, simplificando e integrando queda:

$$S=\int_{-10}^{10}\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{2x}-2+e^{-2x})}\,dx=\int_{-10}^{10}\sqrt{\frac{4}{4}+\frac{1}{4}(e^{2x}-2+e^{-2x})}\,dx$$

$$S=\int_{-10}^{10}\sqrt{\frac{1}{4}(e^{x}+e^{-x})^2}\,dx=\left[\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})\right]_{-10}^{10}=e^{10}-e^{-10}\approx 22{,}026.465$$

Ejemplo 4

Encontrar la longitud de arco de la función $y=\ln(Sen\,x)$, en el intervalo $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$.

Derivando la función dada queda:

$y=\ln(Sen\,x)\qquad y'=\frac{Cos\,x}{Sen\,x}=Ctg\,x\qquad (y')^2=Ctg^2x$

Sustituyendo $(y')^2=Ctg^2x$ en la definición de longitud de arco, simplificando, completando el diferencial e integrando queda:

$$S=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{1+Ctg^2x}\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{Csc^2x}\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}Csc\,x\,dx=[ln|Csc\,x-Ctg\,x|]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}$$

$$S\approx 1.099$$

Ejercicio 3.3

Hallar la longitud de arco de la función dada en el intervalo dado.

1. $y=(x-1)^{\frac{3}{2}},\quad [2,4]$
2. $y=250\,Cosh\,\frac{x}{250}\,,\quad [-25,25]$
3. $y=\ln Cos\,x\quad \left[0,\frac{\pi}{3}\right]$
4. $y=\sqrt{16-x^2},\quad [0,2]$
5. $y=\frac{1}{12}\ln x^4,\quad [2,4]$
6. $y=2x^2,\quad \left[0,\frac{\pi}{6}\right]$
7. $y=\frac{1}{2}x^2-3x,\quad [2,4]$
8. $y=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-\sqrt{5},\quad [1,4]$

Solución al ejercicio 3.3

1. $S\approx 4.66$ 2. $S\approx 50.083$ 3. $S=1.317$ 4. $S\approx 2.094$

5. $S\approx 2.014$ 6. $S\approx 0.793$ 7. $S\approx 2.296$ 8. $S\approx 3.043$

Elemento de competencia 7:

Formular la integral definida mediante la interpretación física de datos para resolver problemas de que involucren el cálculo del trabajo efectuado por una fuerza variable.

Conocimiento previo: Concepto de trabajo realizado por una fuerza constante, los diferentes tipos de fuerzas que pueden intervenir para realizar un trabajo y sus fórmulas correspondientes.

Actividad No. 25	**A fuerzas**	**Individual – extra aula**
Propósito: Investigar los diferentes tipos de fuerzas que se ejercen para realizar un trabajo.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga las definiciones correctas y que incluyan su representación matemática.		
Tiempo estimado para la actividad: 1 hora		

Descripción de la actividad.
1) Definir cada una de las siguientes leyes y su representación matemática:
a) Ley de Hooke
b) Segunda ley de Newton
c) Ley de gravitación universal
d) Ley de Coulomb
e) Principio de Arquímides

3.4 Trabajo

El trabajo determina la energía necesaria para realizar varias tareas. Este trabajo es realizado por una fuerza cuando desplaza un objeto.

Si la fuerza es constante el trabajo está dado por: $W = F\ Cos\ \theta\ D$; en donde:
W = trabajo; *F* = fuerza; *D* = desplazamiento y θ = ángulo entre el vector fuerza y el vector del desplazamiento.

La unidad del trabajo es el Joule (J) si la fuerza (*F)* está dada en Newton (*N*) y el desplazamiento (*D*) en metros (*m*) y en Ergios (*E*), si la fuerza está dada en Dinas (*D*) y el desplazamiento en centímetros (*cm*).

$$1\,Joule = 10^7\ ergios$$

Si la fuerza es variable el trabajo está dado por:

$$\boldsymbol{W = \int_a^b F(x)dx}$$

En donde: F(x) es la fuerza variable cuando el objeto es desplazado a lo largo de una línea recta, desde *x* = a hasta *x* = b.

Ejemplo 1:

Cuando una partícula se ubica a una distancia de “x” metros del origen, una fuerza de $x^2 + 3x$ N actúa sobre ella. ¿Cuánto trabajo se realiza para moverla desde x = 2 hasta x = 5?

Solución:

Datos: $F(x) = x^2 + 3x\ N; a = 2m; b = 5m$

$$\boldsymbol{W = \int_a^b F(x)dx}$$

Sustituyendo los datos y resolviendo la integral, resulta:

$$W = \int_2^5 (x^2 + 3x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\bigg|_2^5 = \left(\frac{125}{3} + \frac{75}{2}\right) - \left(\frac{8}{3} + 6\right) = \frac{475}{6} - \frac{26}{3}$$

$$\boldsymbol{W = \frac{141}{2}\ J}.$$

Ejemplo 2:

Cierto muelle ejerce una fuerza de 100 N cuando se deforma 10 cm a partir de su longitud natural.

a) ¿Cuál es el trabajo realizado al deformar el muelle 5 cm a partir de su longitud natural?

b) ¿Cuál es el trabajo realizado al deformarlo una longitud adicional de 8 cm?

Solución:

Datos: F = 100 N cuando x = 0.1m

F(x)= 0 F(x) = 1000x

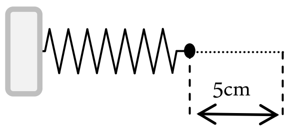
La fuerza necesaria para deformar un resorte o muelle está dada por la Ley de Hooke, la cual establece que: $F = Kx$, en donde se sustituyen los datos dados para encontrar el valor de *K* y resulta:

$100 = K(0.1); despejando, resulta\ que\ K = 1000$

Entonces, para este muelle en particular, la función fuerza es: $F(x) = 1\ 000\ x$

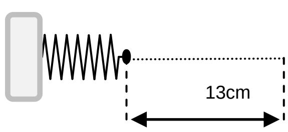
a) Considerando *a* = 0 y *b* = 0.05, el trabajo realizado en esta deformación inicial es:

$$\boldsymbol{W = \int_a^b F(x)dx} = \int_0^{0.05} 1000\ x\ dx$$
$$W = 500x^2|_0^{0.05} = \boldsymbol{1.25\ J}$$



b) Considerando a = 0.05 y b = 0.13, el trabajo realizado en esta deformación es:

$$\boldsymbol{W = \int_a^b F(x)dx} = \int_{0.05}^{0.13} 1000\ x\ dx$$
$$W = 500x^2|_{0.05}^{0.13} = 8.45 - 1.25 = \boldsymbol{7.2\ J}$$



Ejemplo 3:

Un módulo lunar pesa 18 toneladas en la superficie de la tierra ¿Cuánto trabajo se realiza al propulsar el módulo en la superficie de la luna a una altura de 30 millas?

Considerar que el radio de la luna es de 1 100 millas y su fuerza de gravedad es 1/6 que la de la tierra.

Solución:

Determinando el peso del módulo en la luna

$$Peso_{(luna)} = \frac{1}{6}\ Peso_{(tierra)}$$

$$Peso_{(luna)} = \frac{1}{6}\ (18) = 3\ Toneladas$$

Como el peso de un cuerpo varía inversamente con el cuadrado de su distancia del centro de la luna, la fuerza *F(x)* ejercida por la gravedad es:

$F(x) = \dfrac{K}{x^2}$

Considerando que el módulo pesa 3 toneladas en la superficie de la luna y el radio de la luna es de 1 100 millas aproximadamente, se determina el valor de *K* y resulta:

$3 = \dfrac{K}{(1\ 100)^2}$; $Despejando\ K = 3\ 630\ 000$

Por lo tanto, la fuerza necesaria para propulsar el módulo desde 1 100 millas hasta 1 130 millas, está dada por $F(x) = \frac{3\ 630\ 000}{x^2}$. el trabajo realizado es:

$$\boldsymbol{W = \int_a^b F(x)dx} = \int_{1\ 100}^{1\ 130} \frac{3\ 630\ 000}{x^2}\ dx$$

$$W = \left.\frac{-3\ 630\ 000}{x}\right|_{1\ 100}^{1\ 130} \approx -3\ 212.4 + 3\ 300 \approx \boldsymbol{87.6\ ton - millas}$$

Ejemplo 4:

De un tambor cilíndrico se han desenrollado 20 metros de un cable que pesa 2 N por metro. Hallar el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad para desenrollar 100 metros más.

Solución:

Sea *x* = longitud desenrollada en un instante dado. Entonces, $F(x) = 2x$ (peso de la cuerda) y considerando un desplazamiento desde x = 20 hasta x= 120, el trabajo realizado está dado por:

$$W = \int_a^b F(x)dx = \int_{20}^{120} 2x\ dx$$

$$W = x^2|_{20}^{120} = 120^2 - 20^2 = \boldsymbol{14\ 000\ J}$$

Ejemplo 5:

Dos protones se repelen con una fuerza que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Un protón está en reposo en el punto (3,1). Encontrar el trabajo realizado para mover el segundo protón de (-1,1) a (1,1).

Solución:
La fuerza que realiza el protón que está en reposo está dada por: $F(x) = \frac{K}{(3-x)^2}$ debido a la posición del protón en reposo en x = 3 y considerando que el protón que se va a mover lo hace desde x = -1 hasta x = 1, entonces el trabajo realizado es:

$$W = \int_a^b F(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{K}{(3-x)^2}\, dx$$

$$W = \left.\frac{K}{3-x}\right|_{-1}^{1} = K\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{4} K\ unidades\ de\ trabajo}$$

El trabajo realizado al vaciar un tanque está dado por:

$$\boxed{W = \int_a^b F(y)A(y)dy}$$

En donde:
$A(y)$= área de la sección transversal a "y" unidades del borde del depósito,
$F(y)$ = Fuerza variable que se necesita para realizar el trabajo y se calcula por:

$$F(y) = \sigma\, s(y)$$

$\sigma =$ Peso específico del fluido ($\sigma = \rho g$)
$\rho =$ densidad del fluido
g = gravedad
$s(y)$ = distancia que ha de recorrer el nivel "y"
a y *b* son los límites y expresan la cantidad a vaciar.

Ejemplo 6:

Un tanque cilíndrico para gasolina de 4 pies de diámetro y 5 pies de largo está colocado de manera que su techo está 1 pie debajo del nivel del suelo ¿Cuánto trabajo se realiza para bombear un tanque lleno de gasolina hasta el nivel del suelo? $\left(\sigma = 42 \frac{lb}{pie^3}\right)$

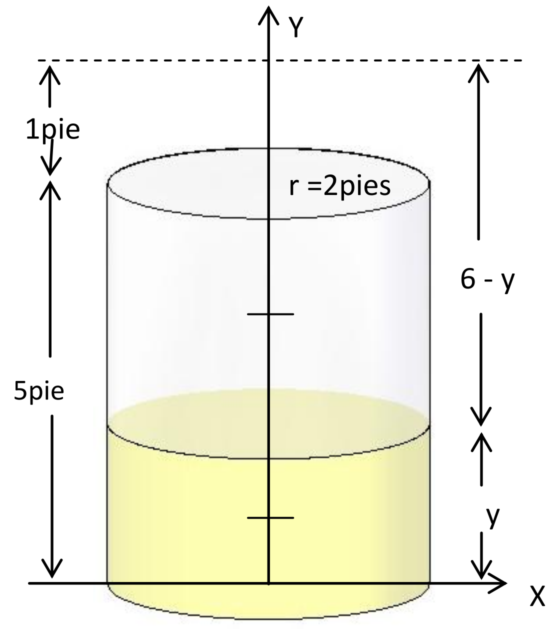
Solución:

$$A(y) = \pi\, r^2 = \pi\, (2)^2 = 4\pi\, pie^2$$

$$s(y) = (6 - y)pies$$

$$F(y) = \sigma\, s(y) = 42\, (6 - y)\frac{lb}{pie^2}$$

Por lo tanto el trabajo realizado está dado por:



$$W = \int_a^b F(y)A(y)dy$$

Considerando que el tanque se va a vaciar desde y = 0 hasta y = 5 y sustituyendo, resulta:

$$W \cong \int_0^5 42(6-y)(4\pi)dy = 168\pi \int_0^5 (6-y)dy = 168\pi \left[6y - \frac{y^2}{2}\right]_0^5$$

$$\boldsymbol{W = 2940\pi \approx 9\,236.3\; lb - pie}$$

Ejercicio 3.4

1. Cuando una partícula se ubica a una distancia de "x" metros del origen, una fuerza de $3x^2 + 2x$ N actúa sobre ella. ¿Cuánto trabajo se requiere para moverla desde x = 1 hasta x = 3?
2. Una fuerza de 50 N comprime un resorte de 10 cm un total de 3 cm. ¿Cuánto trabajo se realiza al comprimir el resorte 5 cm?
3. Se requieren 7.5 J de trabajo para comprimir un resorte 2 cm de su longitud natural. Encontrar el trabajo requerido para comprimir el resorte 1 cm adicional.
4. Hallar el trabajo realizado contra la fuerza de la gravedad para elevar un satélite de 6 toneladas de peso hasta una altura de 200 millas sobre la superficie terrestre. Considerar que el radio de la tierra es de 4 000 millas.
5. Una cadena que mide 15 m pesa 30N por metro está extendida en el suelo. Encontrar el trabajo realizado para levantar la cadena a una altura de 15 m para que quede totalmente extendida verticalmente.
6. Dos partículas se repelen mutuamente con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Suponiendo que una de ellas permanece fija en un punto del eje X a 3 unidades a la derecha del origen, hallar el trabajo requerido para desplazar a la otra partícula desde un punto situado a 2 unidades a la izquierda del origen hasta el origen.
7. Un tanque cilíndrico de 4 pies de diámetro y 5 pies de largo está colocado de manera que su techo está 1 pié debajo del nivel del suelo ¿Cuánto trabajo se realiza para bombear un tanque lleno de agua hasta el nivel del suelo? $\left(\sigma = 62.4 \frac{lb}{pié^3}\right)$
8. Una cisterna rectangular con base de 2m por 3m y una altura de 2 m está llena de agua. ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear el agua por encima del borde superior para vaciar: a) la mitad de la cisterna, b) toda la cisterna? $\left(\sigma = 9800 \frac{N}{m^3}\right)$

Solución al ejercicio 3.4.

1) 34 J 2) 2.08 J 3) 9.375 J 4) 1 142.86 ton –millas

5) 3 375 J 6) $\frac{2}{15}K$ unidades de trabajo 7) 13 759.2 lb –pie

8) a) 29 400J; b) 117 600 J

Unidad temática 2: Cálculo Integral para funciones de dos o más variables

Competencia particular 4:

Analizar integrales que involucran funciones de dos o más variables, empleando el concepto de integral iterada para resolver integrales múltiples.

Elemento de competencia 8:

Analizar geométricamente regiones en el plano y el espacio aplicando el concepto de integral iterada para calcular integrales múltiples.

Conocimiento previo: Concepto de funciones de dos variables, en cuanto a su gráfica mediante software y evaluación; y concepto de derivadas parciales.

Actividad No. 26	**Fun Var Var**	**Individual – extra aula**
Propósito: Activar el conocimiento previo en funciones de varias variables.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga la información correcta y completa de cada función dada.		
Tiempo estimado para la actividad: 1 hora		

Descripción de la actividad:
Para cada una de las siguientes funciones, encuentre:
1. La gráfica utilizando el software más adecuado.
2. Evaluar $f(0,0)\ y\ f(-1,\pi)$
3. Encontrar las primeras derivadas parciales.

Funciones:
1) $f(x,y) = x^2 + xy$ 2) $f(x,y) = (2x + 3y)^2$ 3) $f(x,y) = e^{-x} Cos\ y$

Capítulo 4. Integración múltiple

4.1 Integrales iteradas

4.1.1 Introducción

En el curso de Matemáticas I se definieron y calcularon las derivadas parciales de funciones de dos variables.

Si $f(x,y) = 4x^2 + 3y^2 - 6x^3y^2$, sus primeras derivadas parciales están dadas por:

$f_x(x,y) = 8x - 18x^2y^2$ Considerando a "*y*" como constante

$f_y(x,y) = 6y - 12x^3y$ Considerando a "*x*" como constante

Si ahora la integral parcial de $F(x,y) = f_x(x,y) = 8x - 18x^2y^2$, con respecto a x, se considera a "*y*" como constante al momento de integrar y resulta:

$$\int f_x(x,y)\,dx = \int (8x - 18x^2y^2)dx = 8\left(\frac{x^2}{2}\right) - 18y^2\left(\frac{x^3}{3}\right) + C(y)$$

$$= 4x^2 - 6x^3y^2 + C(y)$$

La constante de integración $C(y)$ es cualquier función de "*y*", para este caso en particular $C(y) = 3y^2$ de acuerdo con la función inicial.

De la misma manera, podemos resolver la integral parcial de $F(x,y) = f_y(x,y) = 6y - 12x^3y$, con respecto a *y*, considerando a "*x*" como constante al momento de integrar y resulta:

$$\int f_y(x,y)dy = \int (6y - 12x^3y)dy = 6\left(\frac{y^2}{2}\right) - 12x^3\left(\frac{y^2}{2}\right) + C(x)$$

$$= 3y^2 - 6x^3y^2 + C(x)$$

La constante de integración $C(x)$ es cualquier función de "*x*", para este caso en particular $C(x) = 4x^2$ de acuerdo con la función inicial.

En general se puede decir lo siguiente:

1. $\int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} f_x(x,y) = f(x,y)\Big]_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} = f(g_2(y),\ y) - f(g_1(y),\ y)$

2. $\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f_y(x,y) = f(x,y)\Big]_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} = f\big(x,\ g_2(x)\big) - f\big(x\ ,g_1(x)\big)$

Nota: La constante de integración $C(y)\ o\ C(x)$ no afecta los resultados anteriores ya que, al aplicar el Teorema fundamental del cálculo, se anula la constante al evaluar los límites.

Ejemplo 1:

Evaluar las integrales parciales dadas:

a) $\int e^{x+y} dy$

$$\int e^{x+y}dy = \int e^x e^y dy = e^x \int e^y dy = e^x e^y + C(x) = e^{x+y} + C(x)$$

b) $\int yCos\, xy\, dx$

$$\int yCos\, xy\; dx = y \int Cos\, xy\; dx = y\left(\frac{1}{y}\right) Sen\, xy + C(y) = Sen\, xy + C(y)$$

c) $\int_0^2 2r^2 Cos\theta\, Sen\theta\, dr$

$$\int_0^2 2r^2 Cos\theta\; Sen\theta\; dr = 2Sen\theta Cos\theta \int_0^2 r^2 dr = Sen\; 2\theta \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}\; Sen\; 2\theta$$

d) $\int_x^{x^2} ln\, xy\, dy$

$$\int_x^{x^2} ln\; xy\; dy = \int_x^{x^2} (\ln x + lny)dy = lnx \int_x^{x^2} dy + \int_x^{x^2} \ln y\; dy$$

Resolviendo por partes la segunda integral, resulta:

$$\int_x^{x^2} ln\; xy\; dy = [y\; lnx + ylny - y]_{y=x}^{x^2} = (x^2 lnx + x^2 lnx^2 - x^2) - (xlnx + xlnx - x)$$

$$\int_{y=x}^{x^2} ln\; xy\; dy = \; x^2 lnx + 2x^2 lnx - x^2 - 2xlnx + x = 3x^2 lnx - x^2 - 2xlnx + x$$

4.1.2 Concepto

Una integral iterada es la resolución de integrales sucesivas que contienen más de un diferencial, en donde por cada diferencial se debe tener una integral definida, se expresan como:

$i)\int_a^b \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$ y $ii)\int_a^b \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dxdy$ en donde *a* y *b* son Constantes.

Presentan las siguientes características:

Con respecto a estas integrales se puede notar que en la integral $i)$

- La integral interior es con respecto a “y”
- El resultado de esta integral ya evaluada es una función de “X”.
- En los límites $y = g_1(x), g_2(x)$ se puede escribir sin la “y”, esto es, $g_1(x), g_2(x)$.

- Al calcular la integral exterior con respecto a “x” y evaluar en los límites *a, b*, el resultado es un número (*a* y *b* son constantes)
- Siempre los límites exteriores serán constantes.

En la integral $ii)$ es posible afirmar que ocurren las mismas características pero con su correspondiente orden de integración.

Ejemplo 1: Calcule las siguientes integrales iteradas

a) $\boldsymbol{\int_0^2 \left[\int_{y=0}^{x}(3+2x-2y)dy\right]dx}$

Solución:

Primero se evalúa la integral parcial seleccionada y resulta:

$$\int_{y=0}^{x}(3+2x-2y)dy = (3y+2xy-y^2)]_{y=0}^{x} = (3x+2x^2-x^2)-(0)$$

$$\int_{y=0}^{x}(3+2x-2y)dy = 3x+x^2$$

Sustituyendo en la integral original y resolviendo la integral ordinaria resultante, queda:

$$\int_0^2\left[\int_{y=0}^{x}(3+2x-2y)dy\right]dx = \int_0^2[3x+x^2]dx = \left(\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2 = \frac{26}{3}$$

Nota: Este ejemplo muestra el cálculo de la integral de una integral, equivalente a una integral iterada.

b) $\boldsymbol{\int_1^3 \int_e^{e^2} \frac{1}{xy}\, dx\, dy}$

Solución:

Primero se evalúa la integral ordinaria interior

$$\int_e^{e^2}\frac{1}{xy}dx = \frac{1}{y}\int_e^{e^2}\frac{dx}{x} = \frac{1}{y}lnx]_e^{e^2} = \frac{1}{y}(lne^2-lne) = \frac{1}{y}$$

Sustituyendo en la integral original y resolviendo la integral parcial resultante, queda:

$$\int_1^3\int_e^{e^2}\frac{1}{xy}\,dx\,dx = \int_0^3\frac{1}{y}dy = lny|_1^3 = ln3-ln1 = ln3$$

Ejercicio 4.1

I. Evalúe la integral parcial dada

1) $\int_1^3 3x^2y\,dx$ 2) $\int_x^{3x}(6x^2+2xy)dy$ 3) $\int_0^{lny} e^{x+y}dx$

4) $\int_x^{x^2} ln\left(\frac{x}{y}\right)dy$ 5) $\int_0^x \frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 6) $\int_0^x Cos(x^2y)dy$

7) $\int_0^{\sqrt{9-y^2}}\left(\frac{4}{\sqrt{9-y^2}}\right)dx$ 8) $\int_1^{4x}\left(\frac{x}{y}\right)dy$ 9) $\int_0^y (2x+y)^2dx$

10) $\int_0^y x\,Sen(xy)dx$

II. Evalúe las siguientes integrales iteradas:

11) $\int_0^2\int_0^1 3xy^2dy\,dx$ 12) $\int_0^{\pi}\int_0^2 2r\,Sen\theta\,dr\,d\theta$

13) $\int_0^{\pi}\int_0^2 r\sqrt{4-r^2}dr\,d\theta$ 14) $\int_0^{\pi/2}\int_0^{1+Cos\theta} Sen\theta\,dr\,d\theta$

15) $\int_0^2\int_0^x (3+2x-2y)dy\,dx$ 16) $\int_1^3\int_e^{e^2}\left(\frac{1}{xy}\right)dx\,dy$

17) $\int_0^2\int_x^0 e^{x+y}\,dy\,dx$ 18) $\int_0^{\pi/2}\int_0^{1-Cos\theta}\theta\,dr\,d\theta$

19) $\int_1^2\int_{-1}^x y\,lnx\,dy\,dx$ 20) $\int_0^{\pi/6}\int_0^{Cos\theta} 2r\,Cos\theta\,dr\,d\theta$

Solución al ejercicio 4.1

1) $26y$ 2) $20x^3$ 3) $e^y(y-1)$ 4) $-x^2lnx+x^2-x$

5) $x(\sqrt{2}-1)$ 6) $\frac{1}{x^2}Senx^3$ 7) 4 8) $x\,ln4x$

9) $\frac{13}{3}y^3$ 10) $-Cosy^2+\frac{1}{y^2}Seny^2$ 11) 2 12) 8

13) $\frac{8}{3}\pi$ 14) $\frac{3}{2}$ 15) $\frac{26}{3}$ 16) $\ln 3$

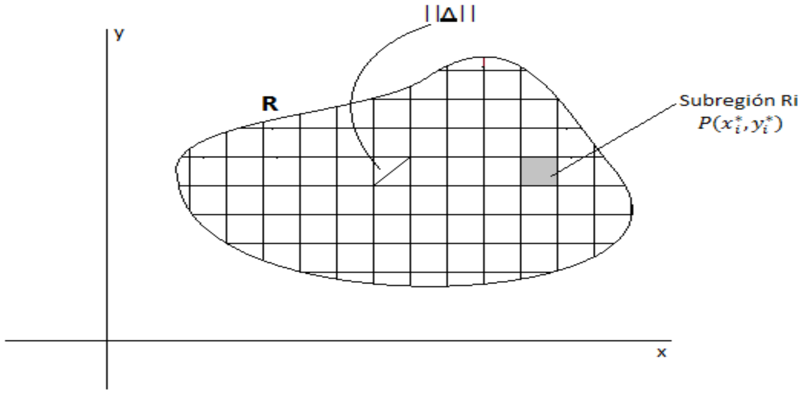
17) $e^2-\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}$ 18) $\frac{\pi^2-4\pi+8}{8}$ 19) $\frac{1}{9}+\frac{1}{3}ln2$ 20) $\frac{11}{24}$

4.2 Integrales dobles

Sea *f* definida en la región *R*, la suma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta A_i$ se llama la suma de Riemann.

DEFINICIÓN 4.2.1: Sea *f* una función definida en una región cerrada y acotada *R* en el plano *xy,* entonces la integral doble de *f* en *R* está definida como:

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta A_i$$



La norma de la partición y un punto en R_i

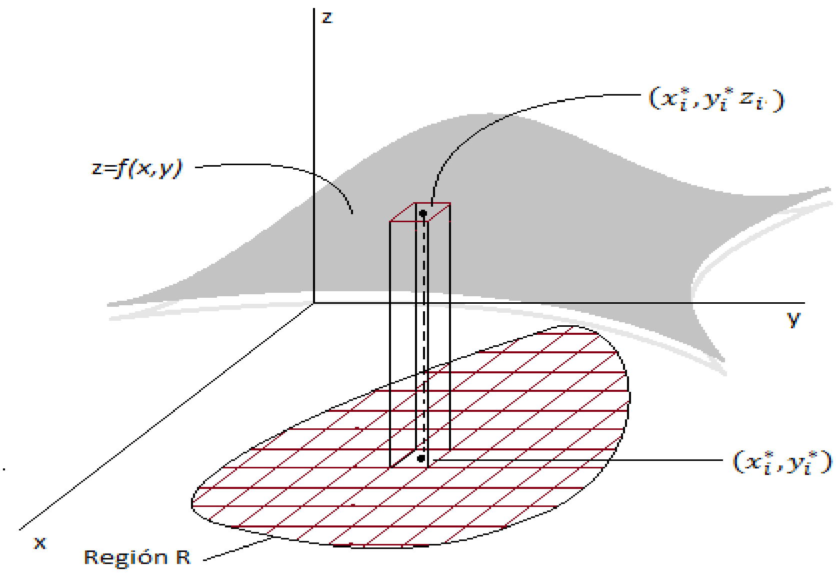
Interpretación geométrica de la integral doble.

Como ΔA_i= área del rectángulo $R_i = \Delta x_i \Delta y_i$, entonces $f(x_i^*, y_i^*)\Delta A_i = z_i \Delta x_i \Delta y_i$= área de la base por la altura, es el volumen de un prisma rectangular.

Y de acuerdo con ello.

$$\lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta A_i = \iint_R f(x,y)dA \quad \text{con } f(x,y)\geq 0$$

Se considera el volumen del solido acotado, abajo por R y arriba por la superficie $z = f(x,y)$ y con paredes verticales. Ver figura.



Volumen de un prisma con base $\Delta x_i, \Delta y_i$ y altura $z_i = f(x_i^*, y_i^*)$

Ahora es posible establecer la relación entre las integrales iteradas y las integrales dobles mediante un teorema cuya demostración se atribuye al matemático italiano Guido Fubini (1879-1943).

TEOREMA 4.2.1: Calculo de integrales dobles

Sea *f* continua en la región cerrada y acotada *R.*
1.- Si *R* está acotada por $a \le x \le b, y\ g_1(x) \le y \le g_2(x)$ siendo g_1 y g_2 continuas en [*a, b*], entonces:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$

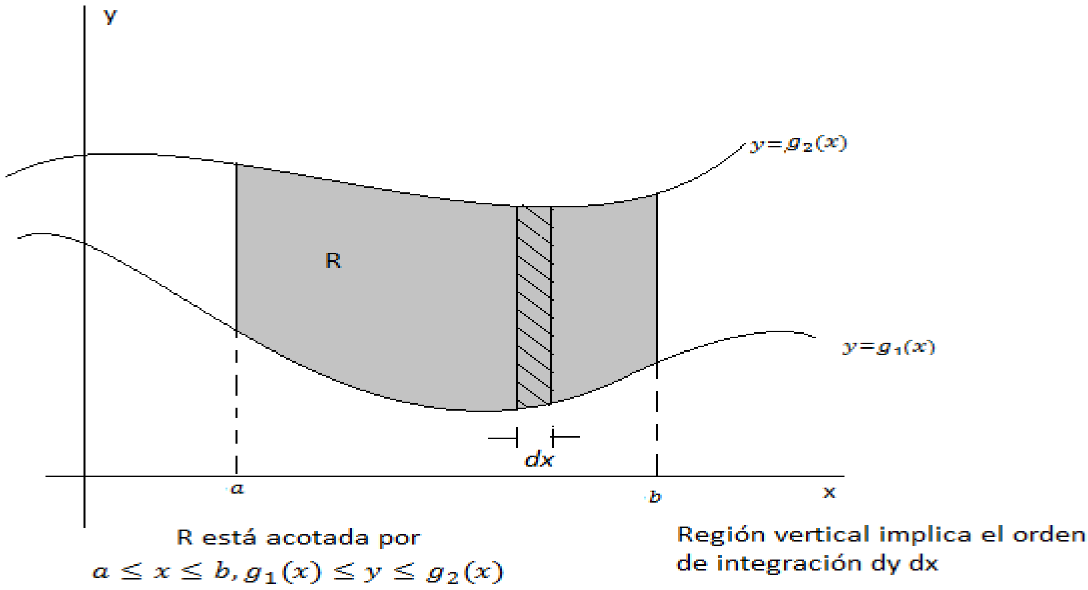
2.- Si *R* está acotada por $a \le y \le b$ y $g_1(y) \le x \le g_2(y)$ siendo g_1 y g_2 continuas en [*a, b*], entonces:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dxdy$$

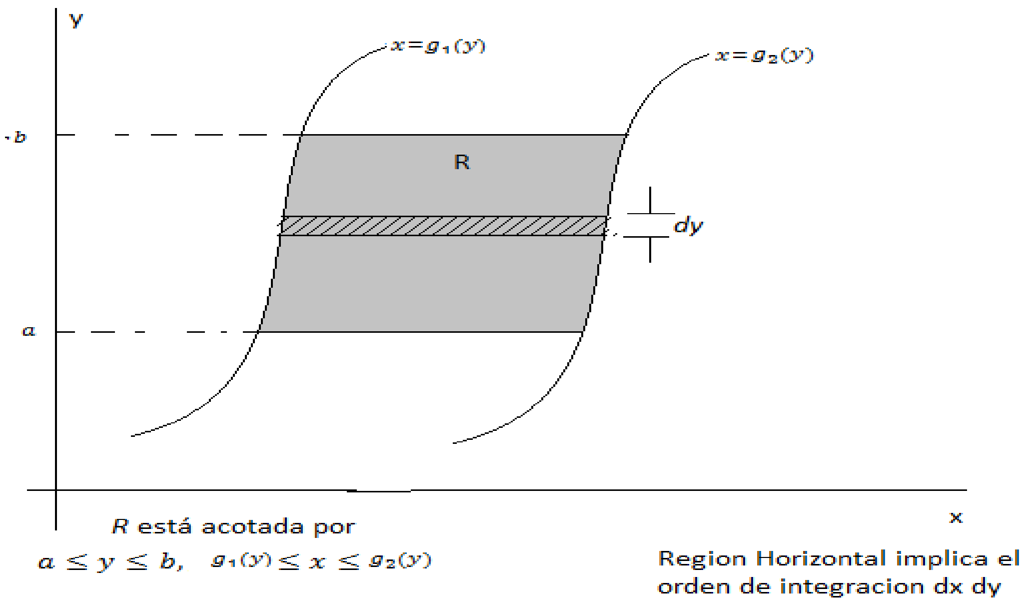
Interpretación geométrica de los límites de integración de las integrales iteradas (1 y 2 del teorema anterior)

$$1)\ \int_a^b \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx \qquad y \qquad 2)\ \int_a^b \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dxdy$$

La integral 1) tiene los límites de integración $a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ que representa una región como la mostrada en la figura. Esta región se llama *región vertical* porque el diferencial *dx=Δx* genera un rectángulo "vertical".



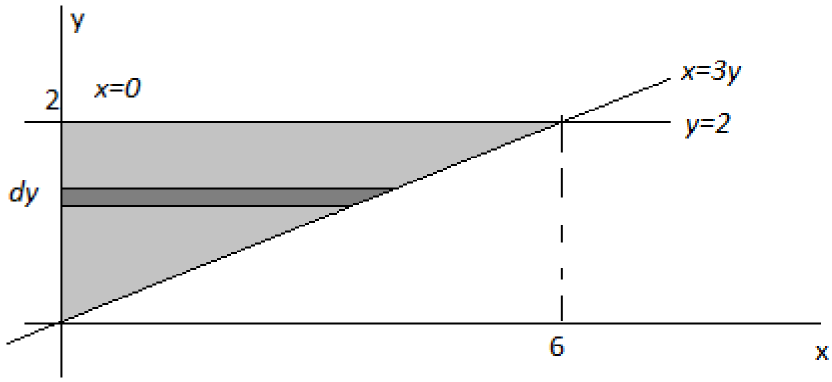
La integral *2)* tiene los límites de integración $a \leq y \leq b, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)$ que representan una región *horizontal* porque el diferencial *dy=Δy* genera un rectángulo "horizontal" mostrado en la figura.



Ejemplo 1.

Calcular: $\int_R \int e^{-x/y} dA$ donde R está limitada por $0 \leq y \leq 2$ y $0 \leq x \leq 3y$.

Solución: Primero se dibuja la región R



Se puede considerar a la región R de la figura anterior como región horizontal, esto indica un orden de integración $dA = dx\ dy$, por lo tanto:

$$\int\limits_R \int e^{-\frac{x}{y}} dA = \int\limits_0^2 \int\limits_0^{3y} e^{-x/y} dxdy = \int\limits_0^2 \left[\int\limits_0^{3y} e^{-\frac{x}{y}} dx \right] dy$$

$$= \int\limits_0^2 \left[-ye^{-x/y} \right]_0^{3y} dy = \int\limits_0^2 \left(-ye^{-3y/y} + ye^0 \right) dy$$

$$= \int\limits_0^2 (-ye^{-3} + y) dy = \left[-e^{-3} \left(\frac{y^2}{2} \right) + \frac{y^2}{2} \right]_0^2$$

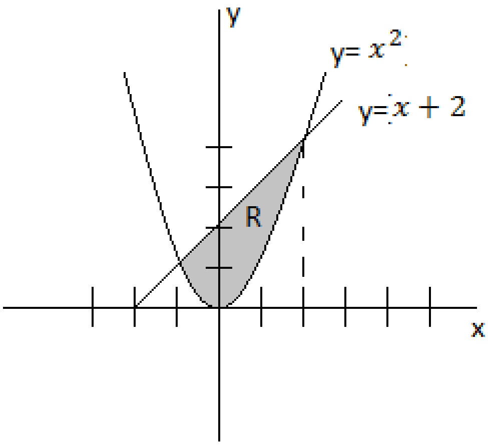
$$= \left[-e^{-3} \left(\frac{2^2}{2} \right) + \frac{2^2}{2} \right] - 0 = -2e^{-3} + 2$$

Ejemplo 2:
Calcular el valor de la integral doble e interpretar geométricamente el resultado.

$$\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} dydx$$

Solución:

$$\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} dydx = \int_{-1}^{2} y|_{x^2}^{x+2}\, dx = \int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 9/2$$



Si se observa la doble integral se nota que *f(x,y)=1* y la región R está limitada por $-1 \le x \le 2$, $x^2 \le y \le x+2$ (véase en la figura). Esto indica que 9/2 es:

a) El valor del volumen del prisma con base R y de altura 1.

b) El área de la región R, ya que el volumen del prisma es igual al área de la base R, por la altura 1.

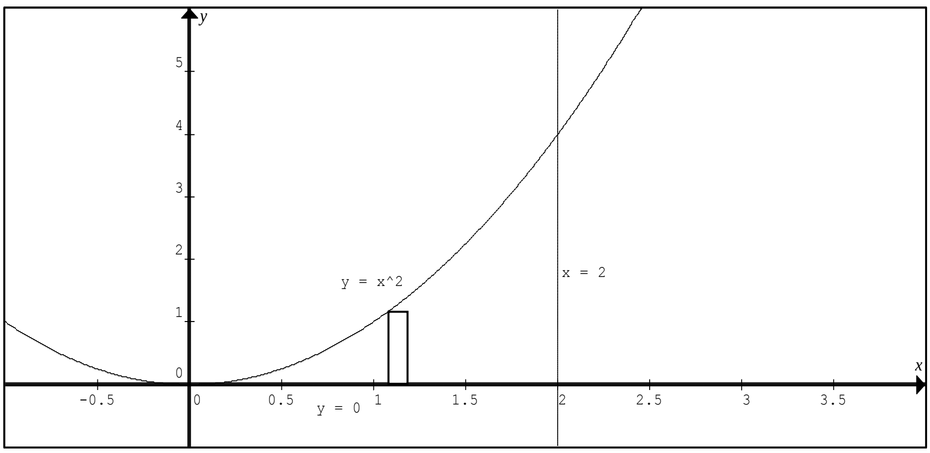
Ejemplo 3

Evaluar la integral doble:

$\int_R \int (x^2+y^2)dA$, donde R esta acotada por: $y = x^2, x = 0, x = 2, y = 0.$

Utilizando 2 órdenes de integración diferentes.

Primero se dibuja la región R



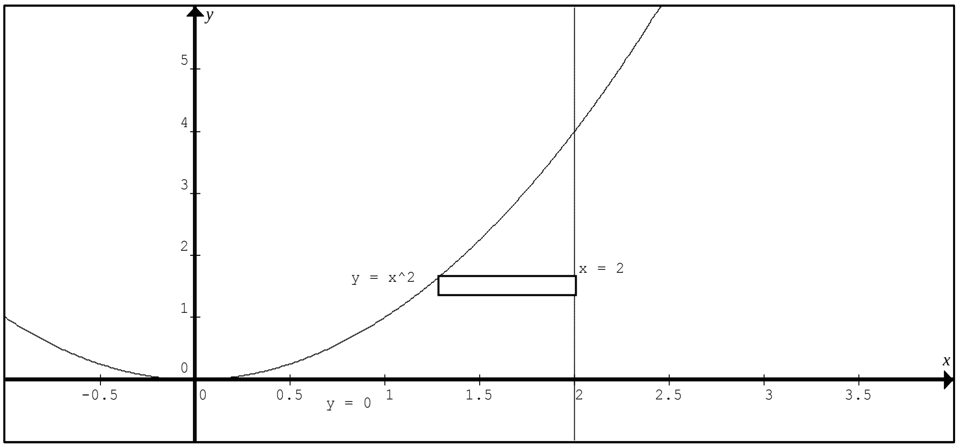
Se toma primero una región vertical, (en esta integral implica: $dA = dy\, dx$)

$\int_R \int (x^2 + y^2) dA = \int_0^2 \int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy\, dx = \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{x^2} dx$

$\int_R \int (x^2 + y^2) dA = \int_0^2 \left(x^4 + \frac{1}{3} x^6 \right) dx = \left[\frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{21} x^7 \right]_0^2$

$\int_R \int (x^2 + y^2) dA = \frac{32}{5} + \frac{128}{21} = \frac{1312}{105}$

Ahora se toma una región horizontal, (en esta integral implica: $dA = dx\, dy$)



$\int_R \int (x^2 + y^2) dA = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 (x^2 + y^2) dx\, dy = \int_0^4 \left[\frac{1}{3} x^3 + x y^2 \right]_{x=\sqrt{y}}^{2} dy$

$\int_R \int (x^2 + y^2) dA = \int_0^4 \left(\frac{8}{3} + 2y^2 - \frac{1}{3} y^{3/2} - y^{5/2} \right) dy$

$\int_R \int (x^2 + y^2) dA = \left[\frac{8}{3} y + \frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{15} y^{5/2} - \frac{2}{7} y^{7/2} \right]_0^4$

$\int_R \int (x^2 + y^2) dA = \frac{32}{3} + \frac{128}{3} - \frac{64}{15} - \frac{256}{7} = \frac{1312}{105}$

Como se puede observar, en este caso se puede elegir cualquier orden de integración, en algunas ocasiones no es así, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4

Calcular la integral doble del ejemplo 1, utilizando otro orden de integración.

Se usa ahora una región vertical

$\int_R \int e^{-x/y} dA = \int_0^6 \int_{\frac{1}{3}x}^2 e^{-x/y} dy dx$

La función $e^{-x/y}$ no tiene antiderivada con respecto a "y". Es importante que en una integral doble se prueben los dos órdenes de integración, si es que uno no se puede aplicar, como en este caso.

Ejercicio 4.2

En los siguientes ejercicios calcule la integral doble en la región R. dibuje un esbozo de la región R y elija el orden de integración más conveniente.

1. $\int_R \int 2x^2\, y^3 dA \qquad R: y = x, \quad y = 0, \quad x = 2$

2. $\int_R \int (x + y)\, dA \qquad R: y = -x, \quad y = 2x - x^2$

3. $\int_R \int 3xy\, dA \qquad R: x = 4y, \quad x = y^2$

4. $\int_R \int e^x\, dA \qquad R: \frac{-y}{3} \leq x \leq \frac{y}{3}, 0 \leq y \leq 3$

5. $\int_R \int \frac{x}{\sqrt{y+1}} dA \qquad R: y = x, x = y^2$

Solución al ejercicio 4.2

1) $\frac{64}{7}$ 2) $\frac{81}{20}$ 3) 512 4) $e + 3e^{-1} - 6 \approx 3.2585$ 5) $\frac{8(\sqrt{2}-1)}{63} \approx 0.0526$

Actividad No. 27	**A ver si puedes**	**Individual – en el aula**
Propósito: Elegir el orden de integración más adecuado.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga la información correcta y completa del análisis de la integral doble dada.		
Tiempo estimado para la actividad: 15 minutos		

Descripción de la actividad:

Resolver la integral $\int_R \int \sqrt{x^3 + 1} dA$ en donde la región R está acotada por: $\sqrt{y} \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1.$
Analiza el orden más adecuado para el dA.
Argumenta tu procedimiento.

4.3 Integrales Triples

Para evaluar una integral iterada triple, se sigue el mismo procedimiento que en las integrales iteradas dobles, es decir, se empieza con la integral más interior con su respectivo diferencial y así se continua hasta llegar a la tercera.

Ejemplo 1

Evaluar la integral $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{3}\int_{0}^{1}(15x+2y+3z)\,dy\,dx\,dz$

Primero resolvemos la integral parcial del centro, en la cual se integra de $0\ a\ 1$ respecto a "y",

$$\int_{0}^{1}(15\,x+2y+3z)\ dy = 15xy+\ y^2+3zy]_0^1 = 15x+1+3z$$

$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{3}\int_{0}^{1}(15x+2y+3z)\,dy\,dx\,dz$ = $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{3}(15x+1+3z)dxdz$

Continuamos ahora con la integral con respecto a "x"

$$\int_{0}^{3}(15x+1+3z)\,dx = \left.\frac{15\,x^2}{2}+x+3zx\right]_0^3 = \frac{141}{2}+9z$$

$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{3}\int_{0}^{1}(15x+2y+3z)\,dy\,dx\,dz$ =$\int_{-1}^{1}\left(\frac{141}{2}+9z\right)dz$

Por último, calculamos la integral ordinaria respecto a "z"

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{141}{2}+9z\right)\ dz = \left.\frac{141}{2}\ z+\frac{9z^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 141$$

Por lo tanto

$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{3}\int_{0}^{1}(15x+2y+3z)\,dy\,dx\,dz$ =141

Ejemplo 2.

Evaluar la integral $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2x}\int_{0}^{x+z} xyz\, dy\, dz\, dx$

Repetimos el procedimiento del ejemplo anterior, calculamos la integral parcial respecto a "y",

$$\int_{0}^{x+z} xyz\, dy = \frac{xzy^2}{2}\Bigg]_0^{x+z} = \frac{xz}{2}\,(x+z)^2 = \frac{xz}{2}\,(x^2+2xz+z^2) = \frac{x^3z}{2} + x^2z^2 + \frac{xz^3}{2}$$

$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2x}\int_{0}^{x+z} xyz\, dy\, dz\, dx = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2x}\left(\frac{x^3z}{2} + x^2z^2 + \frac{xz^3}{2}\right) dzdx$

Ahora se calcula la integral parcial respecto a " z"

$$\int_{0}^{2x}\left(\frac{x^3z}{2} + x^2z^2 + \frac{xz^3}{2}\right) dz = \frac{x^3z^2}{4} + \frac{x^2z^3}{3} + \frac{xz^4}{8}\Bigg]_0^{2x} = 3x^5 + \frac{8x^6}{3}$$

Por último, evaluamos la integral ordinaria respecto a "x"

$$\int_{-1}^{1}\left(3x^5 + \frac{8}{3}\,x^6\right) dx = \frac{3x^6}{6} + \frac{8}{21}\,x^7\Bigg]_{-1}^{1} = \frac{16}{21}$$

Por lo tanto

$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2x}\int_{0}^{x+z} xyz\, dy\, dz\, dx = \frac{16}{21}$

Ejemplo 3

Evaluar la integral $\int_{1}^{e^2}\int_{1}^{e}\int_{0}^{\frac{1}{xz}} \ln z\, dy\, dz\, dx$

$$\int_{0}^{\frac{1}{xz}} \ln z\, dy = (\ln z)\, y\Big]_0^{\frac{1}{xz}} = \frac{1}{xz}\ln z$$

$\int_{1}^{e^2}\int_{1}^{e}\int_{0}^{\frac{1}{xz}} \ln z\, dy\, dz\, dx = \int_{1}^{e^2}\int_{1}^{e}\left(\frac{1}{xz}\ln z\right) dz\, dx$

$$\int_{1}^{e}\left(\frac{1}{xz}\ln z\right) dz = \frac{1}{x}\int_{1}^{e}\frac{\ln z}{z}\, dz$$

Haciendo cambio de variable

$u = \ln z, \qquad du = \frac{1}{z}\, dz$

$$\int_1^e \left(\frac{1}{xz}\ln z\right) dz = \frac{ln^2 z}{2x}\Bigg]_1^e = \frac{1}{2x}\,[(\ln e)^2 - (\ln 1)^2] = \frac{1}{2x}$$

$$\int_1^{e^2}\int_1^e\int_0^{\frac{1}{xz}} \ln z\, dy\, dz\, dx = \int_1^{e^2}\left(\frac{1}{2x}\right) dx$$

$$\int_1^{e^2}\left(\frac{1}{2x}\right) dx = \frac{1}{2}\int_1^{e^2}\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln x\Bigg]_1^{e^2} = \frac{1}{2}\ln e^2 - \frac{1}{2}\ln 1 = 1$$

Por lo tanto

$$\int_1^{e^2}\int_1^e\int_0^{\frac{1}{xz}} \ln z\, dy\, dz\, dx = 1$$

Ejercicio 4.3

Resuelva las siguientes integrales iteradas

1. $\int_0^1\int_2^4\int_0^1 4\,x^3y^2z^2\,dx\,dy\,dz$

2. $\int_0^1\int_0^x\int_0^{xz} x\,dy\,dz\,dx$

3. $\int_0^1\int_0^{y^2}\int_x^y (9x^2+z)\,dz\,dx\,dy$

4. $\int_0^2\int_0^1\int_0^y x\,e^{y^2}\,dz\,dy\,dx$

5. $\int_0^1\int_1^3\int_0^z (e^{xz}+1)\,dy\,dx\,dz$

6. $\int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 9r^2\,Cos\,\theta\;dr\,d\theta\,dz$

7. $\int_1^5\int_{\sqrt{x}}^x\int_0^{\ln z} 3\,x\,e^{2y}\,dy\,dz\,dx$

8. $\int_0^2\int_z^{3z}\int_y^{2y} (z+y+x)\,dz\,dy\,dx$

9. $\int_0^\pi\int_0^2\int_0^y Cos\,2y\,dz\,dx\,dy$

10. $\int_0^\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} Sen\,x\,Sen\,y\,Sen\,z\,dx\,dy\,dz$

Solución al ejercicio 4.3

1. $\frac{56}{9}$	2. $\frac{1}{10}$	3. $\frac{169}{840}$	4. $e-1$	5. $\frac{1}{3}\,e^3 - e + \frac{5}{3}$
6. 6	7. $\frac{2229}{65}$	8. $\frac{548}{3}$	9. $-\frac{1}{4}$	10. $-\frac{2}{\sqrt{2}}$

Actividad No. 28	**Multiplica tu esfuerzo**	**Individual – extra aula**

Propósito: Resolver problemas de ingeniería mediante la aplicación de integrales dobles.
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga la solución correcta a cada problema propuesto
Tiempo estimado para la actividad: 50 minutos

Descripción de la actividad:
Problemas propuestos

1. La carga eléctrica está distribuida sobre el rectángulo $0 \le x \le 2$, $1 \le y \le 2$ de tal forma que la densidad de carga en el punto (x, y) está dada por $\rho(x, y) = x^2 + 3y^2$, medida en coulombs por metro cuadrado. Obtén la carga total en el rectángulo. Las variables x y y se miden en metros.

   Considerar:

   La densidad de carga se define como: cantidad de carga por unidad de área. Cuando es constante (o uniformemente distribuida)

$$\rho = \frac{Q}{A} = \frac{carga\ total}{área\ total} = \frac{Coul}{m^2}$$

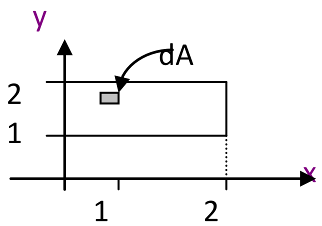
   En este caso la densidad es variable y depende del punto (x,y) que tomemos de la placa. Si tomamos un diferencial de área, dA, con vértice en el punto (x,y), la densidad en esa área infinitamente pequeña se considera constante e igual a $\rho(x, y)$. Por lo tanto se tiene que:

$$\rho(x, y) = \frac{dQ}{dA}, donde\ dQ\ es\ la\ carga\ que\ hay\ en\ dA$$

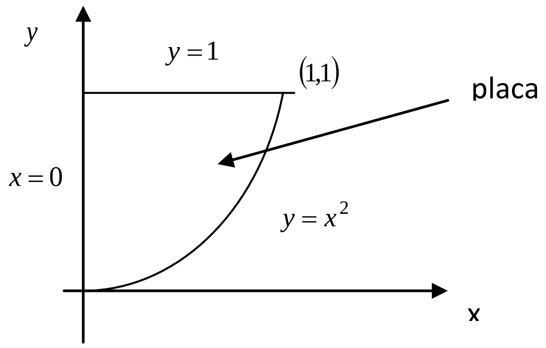
   Entonces $dQ = \rho(x, y)dA$

   Si sumamos todas las cargas dQ que hay en todos los diferenciales de área, dA, en que podemos dividir la placa, obtendremos la carga total Q que hay en esa placa, mediante:

$$Q = \int_R \int dQ = \int_R \int \rho(x, y)dA$$



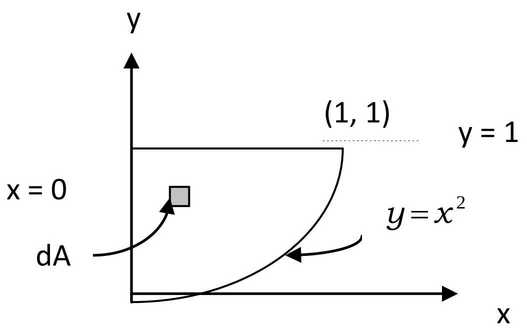
2. Obtén la masa de la placa con densidad de masa $f(x, y) = xy \quad grs/cm^2$ y cuyos perfiles se muestran en la siguiente figura.



Considerar:

La densidad superficial se define como masa por unidad de área. Si la masa está uniformemente distribuida en la placa , densidad constante, $f = \frac{M}{A} = \frac{masa\ de\ la\ \ placa}{área\ de\ la\ \ placa}$. Como la densidad es variable $f(x,\ y)$, depende del punto $(x,\ y)$ que tomemos de la placa, procedemos a tomar un elemento de área infinitamente pequeño, un diferencial de área $dA = dy\,dx$, el cual tiene una masa infinitamente pequeña dM, de tal manera que en esa pequeña porción la densidad es constante e igual a la que tiene en el punto donde tomemos nuestro diferencial de área. Por lo tanto tendremos

$$f(x,y) = \frac{dM}{dA}\ de\ donde\ dM = f(x,y)dA = xy\ dydx$$



Por lo tanto, la masa de la placa está dada por:

$$M = \int_R \int xy\ dydx$$

A N E X O

U.A.N.L.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

FORMULARIO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Elaborado por: M.C. Patricia Rodríguez Gzz.

REGLAS BÁSICAS

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

$$\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx \qquad K = \text{Cte.}$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

CAMBIO DE VARIABLE

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

En donde u es una función polinomial o trascendental.

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

Propiedades:

Log (pq) = Log p + Llog q **Ln e = 1**

$$\log\left(\frac{p}{q}\right) = \log(p) - \log(q)$$ **Ln 1 = 0**

Log p^r = r Log p

2

FUNCIONES EXPONENCIALES

$$\int e^u du = e^u + C$$

e = Cte. de Euler = 2.718

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

Propiedad: $e^{\ln x} = x$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\int \mathrm{Sen}(u)du = -\mathrm{Cos}(u) + C$$

$$\int \mathrm{Cos}(u)du = \mathrm{Sen}(u) + C$$

$$\int \mathrm{Tan}(u)du = \ln|\mathrm{Sec}(u)| + C$$
$$= -\ln|\mathrm{Cos}(u) + C$$

$$\int Cot(u)du = -\ln|Csc(u)| + C$$
$$= \ln|Sen(u)| + C$$

$$\int \mathrm{Sec}(u)du = \ln|\mathrm{Sec}(u) + \mathrm{Tan}(u)| + C$$

$$\int \mathrm{Csc}(u)du = \ln|\mathrm{Csc}(u) - \mathrm{Cot}(u)| + C$$

$$\int \mathrm{Sec}^2(u)du = \mathrm{Tan}(u) + C$$

$$\int \mathrm{Csc}^2(u)du = -\mathrm{Cot}(u) + C$$

$$\int \mathrm{Sec}(u)\mathrm{Tan}(u)du = \mathrm{Sec}(u) + C$$

$$\int \mathrm{Csc}(u)\mathrm{Cot}(u)du = -\mathrm{Csc}(u) + C$$

3

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

$$\int Cosh\ udu = Senh\ u + c$$

$$\int Senh\ udu = Cosh\ u + c$$

$$\int Sech^2\ udu = Tanh\ u + c$$

$$\int Csch^2\ udu = -Coth\ u + c$$

$$\int Sech\ u\ Tanh\ udu = -Sech\ u + c$$

$$\int Csch\ u\ Coth\ udu = -Csch\ u + c$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \mathrm{Sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\mathrm{Sec}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

4

FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \mathrm{Senh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \mathrm{Cosh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = \frac{-1}{a} Csch^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = \frac{-1}{a} Sech^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C$$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{a}\mathrm{Tanh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C$$

Forma equivalente de las integrales que dan como resultado funciones **Hiperbólicas Inversas**

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left(u+\sqrt{u^2 \pm a^2}\right)+C$$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2 \pm u^2}}{|u|}\right)+C$$

5

INTEGRAL POR PARTES

$$\int udv = uv - \int vdu$$

SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Forma $\rightarrow$ Sustitución $\rightarrow$ la raíz se sustituye por:

$$\sqrt{a^2-u^2} \rightarrow u = a\mathrm{Sen}\theta \rightarrow a\mathrm{Cos}\theta$$

$$\sqrt{a^2+u^2} \rightarrow u = a\mathrm{Tan}\theta \rightarrow a\mathrm{Sec}\theta$$

$$\sqrt{u^2-a^2} \rightarrow u = a\mathrm{Sec}\theta \rightarrow a\mathrm{Tan}\theta$$

SUSTITUCIONES DIVERSAS

$$Senu = \frac{2z}{1+z^2} \qquad Cosu = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$du = \frac{2dz}{1+z^2} \qquad z = \tan\left(\frac{u}{2}\right)$$

6

CASOS TRIGONOMÉTRICOS

CASO I. $\int \mathrm{Sen}^n(u)du$; $\int \mathrm{Cos}^n(u)du$

En donde **n** es entero impar positivo
Expresar:

Sen ^{n} (u) = Sen $^{n-1}$(u) Sen (u)
Usar: Sen ^{2}(u) = 1 – Cos ^{2}(u)

Cos ^{n}(u) = Cos $^{n-1}$ (u) Cos (u)
Usar: Cos ^{2}(u) = 1 – Sen ^{2} (u)

CASO II. $\int \mathrm{Sen}^n(u)\mathrm{Cos}^m(u)du$;

En donde al menos un exponente es entero impar positivo: utilizar

Sen ^{2} (u) + Cos ^{2} (u) = 1 de manera similar al CASO I

NOTA: Si los dos exponentes son enteros impares positivos se cambia el impar menor. 7

CASOS TRIGONOMÉTRICOS
CASO III.

$\int \mathrm{Sen}^n udu$; $\int \mathrm{Cos}^m(u)du$

$\int \mathrm{Sen}^n(u)\mathrm{Cos}^m(u)du$

En donde **n** y **m** son exponentes enteros pares positivos usar:

$$\mathrm{Sen}^2(u) = \frac{1-\mathrm{Cos}(2u)}{2}$$

$$\mathrm{Cos}^2(u) = \frac{1+\mathrm{Cos}(2u)}{2}$$

CASO IV:

$\int \mathrm{Sen}(nu)\mathrm{Cos}(mu)du$

$\int \mathrm{Sen}(nu)\mathrm{Sen}(mu)du$

$\int \mathrm{Cos}(nu)\mathrm{Cos}(mu)du$

En donde m y n son números cualesquiera. Utilizar:

$$SenACosB = \frac{1}{2}\left[Sen(A-B)+Sen(A+B)\right]$$

$$\mathrm{SenASenB} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Cos}(A-B)-\mathrm{Cos}(A+B)\right]$$

$$CosACosB = \frac{1}{2}\left[Cos(A-B)+Cos(A+B)\right]$$

8

CASOS TRIGONOMÉTRICOS

CASO V. $\int \mathrm{Tan}^n(u)du$; $\int \mathrm{Cot}^n(u)du$

En donde **n** es cualquier número entero;
Escribir:

$\mathrm{Tan}^n(u) = \mathrm{Tan}^{n-2}(u)\,\left[\mathrm{Sec}^2(u)-1\right]$

$\mathrm{Cot}^n(u) = \mathrm{Cot}^{n-2}(u)\,\left[\mathrm{Csc}^2(u)-1\right]$

CASO VI. $\int \mathrm{Sec}^n(u)du$; $\int \mathrm{Csc}^n(u)du$

En donde **n** es entero par positivo
Expresar:

$\mathrm{Sec}^n(u) = \left(\mathrm{Tan}^2u+1\right)^{\frac{n-2}{2}}\mathrm{Sec}^2(u)$

$\mathrm{Csc}^n(u) = \left(\mathrm{Cot}^2u+1\right)^{\frac{n-2}{2}}\mathrm{Csc}^2(u)$

NOTA: Si **n** es impar integrar por partes

CASO VII:

$\int \mathrm{Tan}^m(u)\mathrm{Sec}^n(u)du$

$\int \mathrm{Cot}^m(u)\mathrm{Csc}^n(u)du$

en donde **n** es un entero par positivo; escribir $\mathrm{Sec}^n(u)$ $\mathrm{Csc}^n(u)$ como el CASO VI.

9

CASOS TRIGONOMÉTRICOS

CASO VIII.

$\int \mathrm{Tan}^m(u)\mathrm{Sec}^n(u)du$

$\int \mathrm{Cot}^m(u)\mathrm{Csc}^n(u)du$

En donde **m** es entero impar positivo, expresar:

$\mathrm{Tan}^m u\mathrm{Sec}^n u = \mathrm{Tan}^{m-1}u\mathrm{Sec}^{n-1}u\mathrm{Tan}u\mathrm{Sec}u$

Usar: $\mathrm{Tan}^2 u = \mathrm{Sec}^2 u - 1$

$\mathrm{Cot}^m u\mathrm{Csc}^n u = \mathrm{Cot}^{m-1}u\mathrm{Csc}^{n-1}u\mathrm{Cot}u\mathrm{Csc}u$

Usar: $\mathrm{Cot}^2 u = \mathrm{Csc}^2 u - 1$

NOTA: Si **m** es par y **n** es impar integrar por partes.

10

FRACCIONES PARCIALES

CASO I. Factores lineales distintos.

A cada factor lineal (ax + b) le corresponde una fracción de la forma :

$$\frac{A}{ax+b}$$

CASO II. Factores lineales repetidos.

A cada factor lineal repetido $(ax + b)^k$
Le corresponde la suma de k fracciones parciales de la forma:

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\ldots..+\frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

CASO III. Factores cuadráticos distintos.

A cada factor cuadrático (ax^2+bx+c) le corresponde una fracción de la forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

11

FRACCIONES PARCIALES

CASO IV. Factores cuadráticos repetidos

A cada factor cuadrático repetido
$(ax^2 + bx + c)^k$ le corresponde la suma de k fracciones parciales de la forma:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\ldots+\frac{A_kx+B_k}{\left(ax^2+bx+c\right)^k}$$

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

$$\int \mathrm{Senh}(u)du = \mathrm{Cosh}(u)+C$$

$$\int \mathrm{Cosh}(u)du = \mathrm{Senh}(u)+C$$

$$\int \mathrm{Sech}^2(u)du = \mathrm{Tanh}(u)+C$$

$$\int \mathrm{Csch}^2(u)du = -\mathrm{Coth}(u)+C$$

$$\int \mathrm{Sech}(u)\mathrm{Tanh}(u)du = -\mathrm{Sech}(u)+C$$

$$\int \mathrm{Csch}(u)\mathrm{Coth}(u)du = -\mathrm{Csch}(u)+C$$

12

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

INVERSAS

$\mathrm{Sen(u)} = \frac{1}{\mathrm{Csc(u)}}$ $\mathrm{Csc(u)} = \frac{1}{\mathrm{Sen(u)}}$

$\mathrm{Cos(u)} = \frac{1}{\mathrm{Sec(u)}}$ $\mathrm{Sec(u)} = \frac{1}{\mathrm{Cos(u)}}$

$\mathrm{Tan(u)} = \frac{1}{\mathrm{Cot(u)}}$ $\mathrm{Cot(u)} = \frac{1}{\mathrm{Tan(u)}}$

PITAGÓRICAS

$\mathrm{Sen}^2\mathrm{(u)} = 1 - \mathrm{Cos}^2\mathrm{(u)}$

Cos^2 (u) = 1 – Sen^2 (u)

Sec^2 (u) = 1 + Tan^2 (u)

Tan^2 (u) = Sec^2(u) – 1

Csc^2 (u) = 1+ Cot^2 (u)

Cot^2 (u) = Csc^2 (u) – 1

FORMA DE COCIENTE

$\mathrm{Tan(u)} = \frac{\mathrm{Sen(u)}}{\mathrm{Cos(u)}}$ $\mathrm{Cot(u)} = \frac{\mathrm{Cos(u)}}{\mathrm{Sen(u)}}$

13

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

ÁNGULO DOBLE

Sen 2u = 2 Sen(u) Cos (u)

Cos 2u = Cos^2 (u) – Sen^2 (u)

$$Sen^2(u) = \frac{1-\cos(2u)}{2}$$

$$Cos^2(u) = \frac{1+\cos(2u)}{2}$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$\mathrm{Sen}\theta = \frac{\mathrm{C.O}}{\mathrm{Hip.}}$ $\mathrm{Cos}\theta = \frac{\mathrm{C.A.}}{\mathrm{Hip.}}$ $\mathrm{Tan}\theta = \frac{\mathrm{C.O.}}{\mathrm{C.A.}}$

$\mathrm{Cot}\theta = \frac{\mathrm{C.A.}}{\mathrm{C.O.}}$ $\mathrm{Sec}\theta = \frac{\mathrm{Hip}}{\mathrm{C.A.}}$

$\mathrm{Csc}\theta = \frac{\mathrm{Hip}}{\mathrm{C.O.}}$

14

IDENTIDADES HIPERBÓLICAS

$$\cosh^2(u) - senh^2(u) = 1$$

$$\sec h^2(u) + \tanh^2(u) = 1$$

$$\coth^2(u) - \csc h^2(u) = 1$$

$$senh(2u) = 2senh(u)\cosh(u)$$

$$\cosh(2u) = \cosh^2(u) + senh^2(u)$$

$$\tanh(2u) = \frac{2\tanh(u)}{1+\tanh^2(u)}$$

$$senh^2(u) = \frac{\cosh(2u)-1}{2}$$

$$\cosh^2(u) = \frac{\cosh(2u)+1}{2}$$

$\mathrm{Senh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ Cosh x = $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Tanh x = $\frac{\mathrm{Senhx}}{\mathrm{Coshx}}$ Coth x = $\frac{\mathrm{Coshx}}{\mathrm{Senhx}}$

Senh x Csch x = 1 Cosh x Sech x = 1

Tanh x Coth x = 1

15

DERIVADAS

$$\mathrm{D_x}(\mathrm{u})^{\mathrm{n}} = \mathrm{n}(\mathrm{u})^{\mathrm{n}-1}\mathrm{du}$$

$$D_x[u.v] = uD_xv + vD_xu$$

$$D_x\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{vD_xu - uD_xv}{v^2}$$

$D_x[\ln u] = \frac{1}{u}D_xu$ $D_x[Log_a u] = \frac{1}{u\ln a}D_xu$

$D_x[e^u] = e^uD_xu$ $D_x[a^u] = a^u \ln aD_xu$

$$D_x[Senu] = CosuD_xu$$

$$D_x[Cosu] = -SenuD_xu$$

$$D_x[Tanu] = Sec^2uD_xu$$

$$D_x[Cotu] = -Csc^2uD_xu$$

$$D_x[Secu] = SecuTanuD_xu$$

$$D_x[Cscu] = -CscuCotuD_xu$$

16

DERIVADAS

$$D_x\left[ArcSenu\right]=\frac{D_x u}{\sqrt{1-u^2}}$$
$$D_x\left[ArcCosu\right]=\frac{-D_x u}{\sqrt{1-u^2}}$$
$$D_x\left[ArcTanu\right]=\frac{D_x u}{1+u^2}$$
$$D_x\left[ArcCotu\right]=\frac{-D_x u}{1+u^2}$$
$$D_x\left[ArcSecu\right]=\frac{D_x u}{|u|\sqrt{u^2-1}}$$
$$D_x\left[ArcCscu\right]=\frac{-D_x u}{|u|\sqrt{u^2-1}}$$

$$D_x\left[Senhu\right]=Cosh(u)D_x u$$
$$D_x\left[Coshu\right]=Senh(u)D_x u$$
$$D_x\left[Tanhu\right]=Sech^2(u)D_x u$$
$$D_x\left[Cothu\right]=-Csch^2(u)D_x u$$
$$D_x\left[Sechu\right]=-Sech(u)Tanh(u)D_x u$$
$$D_x\left[Cschu\right]=-Csch(u)Coth(u)D_x u$$

17

DERIVADAS

$$Dx\left[Senh^{-1}u\right]=\frac{D_x u}{\sqrt{u^2+1}}$$
$$Dx\left[Cosh^{-1}u\right]=\frac{D_x u}{\sqrt{u^2-1}}$$
$$Dx\left[Tanh^{-1}u\right]=\frac{D_x u}{1-u^2}$$
$$Dx\left[Coth^{-1}u\right]=\frac{D_x u}{1-u^2}$$
$$Dx\left[Sech^{-1}u\right]=\frac{-D_x u}{u\sqrt{1-u^2}}$$
$$Dx\left[Csch^{-1}u\right]=\frac{-D_x u}{|u|\sqrt{1+u^2}}$$

18

LEYES DE EXPONENTES

$$a^m a^n = a^{m+n}$$
$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$
$$(ab)^m = a^m b^m$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad m>n$$
$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \qquad m<n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$
$$a^0 = 1$$

19

LO QUE NO DEBE HACERSE

A continuación se escriben formulas que son incorrectas. NUNCA LAS USES.

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$
$$\frac{a}{b+c}=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$$

Le seguiremos agregando otras más adelante

20

RÚBRICAS

Reporte escrito

Categoría	Bien 100% - 71%	Regular 70% - 41%	Deficiente 40% - 0%
Contenido (85%)	• Analiza la información de manera clara, coherente y ordenada. • Expresa sus conclusiones en donde refleja los juicios de valor. • Desarrolla las ideas principales del tema	• Presenta un análisis incompleto o no lo expresa en forma clara, coherente u ordenada. • Omite el desarrollo de algunas ideas principales. • No incluye juicios de valor en sus conclusiones.	• No presenta análisis de información. • No desarrolla algunas ideas principales. • La conclusión es inadecuada y carece de juicios de valor.
Presentación (15%)	• Limpieza y orden. • Cumple con las indicaciones dadas por el profesor. • Distingue en el contenido una introducción, el cuerpo del reporte y conclusiones. • Presenta buena ortografía. • Contiene una bibliografía pertinente y apropiada.	• Limpieza y orden. • No cumple con algunas indicaciones del profesor. • No hay una clara distinción entre la introducción, el cuerpo del reporte y las conclusiones. • Presenta mínimas deficiencias ortográficas. • Contiene una bibliografía pertinente y apropiada.	• No cumple con el orden ni limpieza. • No cumple con algunas indicaciones del profesor. • No hay una clara distinción entre la introducción, el cuerpo del reporte y las conclusiones. • Presenta deficiencias ortográficas. • No contiene una bibliografía o no es apropiada.

Síntesis

Categoría	Bien 100% - 71%	Regular 70% - 41%	Deficiente 40% - 0%
Contenido (85%)	• Identifica las ideas principales del tema. • Se expresa clara y ordenadamente. • Desarrolla una conclusión adecuada o aplica satisfactoriamente lo aprendido en un ejemplo.	• Omite algunas ideas principales. • Se expresa clara y ordenadamente. • No hace una conclusión adecuada o no presenta una aplicación apropiada.	• Omite ideas principales. • No se expresa clara y ordenadamente. • No hace una conclusión adecuada ni presenta una aplicación apropiada.
Presentación (15%)	• Limpieza y orden. • Cumple con las indicaciones dadas por el profesor. • Presenta una ortografía apropiada.	• Limpieza y orden. • No cumple con algunas indicaciones del profesor. • Presenta mínimas deficiencias ortográficas.	• No cumple con el orden ni limpieza. • No cumple con algunas indicaciones del profesor. • Presenta deficiencias ortográficas.

Exposición Oral

Categoría	Bien 100% - 71%	Regular 70% - 41%	Deficiente 40% - 0%
Contenido (70%)	• Domina bien el tema demostrando un completo entendimiento utilizando un vocabulario apropiado para la audiencia y definiendo palabras que podrían ser nuevas. • Presenta ideas coherentes con información ordenada llegando a una conclusión acertada. • Contesta con precisión la mayoría de las preguntas planteadas.	• Domina el tema demostrando algo de entendimiento y utilizando algo de vocabulario apropiado para la audiencia y definiendo algunas palabras que podrían ser nuevas. • Presenta algunas ideas coherentes con información ordenada y trata de llegar a la conclusión acertada. • Contesta con precisión algunas de las preguntas planteadas.	• No domina bien el tema ni demuestra un entendimiento ni utiliza un vocabulario apropiado para la audiencia y no define palabras que puedan ser nuevas. • No presenta ideas coherentes ni información ordenada ni llega a una conclusión acertada. • No contesta con precisión las preguntas planteadas.
Presentación (30%)	• Usa tecnología adecuada y disponible o material suficiente y adecuado para la presentación del tema. • El tono usado expresa la seguridad del dominio del tema. • La duración de la presentación es apropiada para el tema.	• Usa alguna tecnología adecuada y disponible o algún material adecuado para la presentación del tema. • El tono usado algunas veces no expresa la seguridad del dominio del tema. • La duración de la presentación es menos o más de lo apropiada para el tema.	• No usa tecnología adecuada y disponible ni material adecuado para la presentación del tema. • El tono no fue usado para expresar la seguridad del dominio del tema. • La duración de la presentación excede en menos o más de lo apropiada para el tema.

Resolución de problemas

Categoría	Bien 100% - 71%	Regular 70% - 41%	Deficiente 40% - 0%
Resolución (85%)	• Llega a la solución correcta • Usa el método adecuado. • El procedimiento es considerablemente bueno.	• No llegó a la solución correcta. • Utiliza el método adecuado • El procedimiento es considerablemente bueno.	• No llegó a la solución correcta. • No utilizó el método adecuado.
Presentación (15%)	• Resuelve el problema ordenadamente y con limpieza.	• Resuelve con limpieza pero poco ordenado el problema.	• Resuelve el problema sin limpieza y poco orden.